QUANTIFICAÇÃO DA ANÁLISE DE RISCOS EM INVESTIMENTOS USANDO MEDIDAS DE DISPERSÃO

Ericka Priscilla Marques
Departamento de Engenharia de Produção da Escola Federal de Engenharia de Itajubá – EFEI
E-mail: ericka@iee.efei.br . Av. BPS, 1303, Bairro Pinheirinho – Itajubá / MG – CEP: 37500-903

Francisco Alexandre de Oliveira
Departamento de Engenharia de Produção da Escola Federal de Engenharia de Itajubá – EFEI
E-mail: faoliveirabr@yahoo.com Av. BPS, 1303 , Bairro Pinheirinho – Itajubá / MG – CEP: 37500-903

Prof. Dr. Pedro Paulo Balestrassi
Departamento de Engenharia de Produção da Escola Federal de Engenharia de Itajubá – EFEI
E-mail: pedro@iem.efei.br , Av. BPS, 1303, Pinheirinho– Itajubá / MG – CEP: 37500-903

Abstract:

In this article will be presented a bibliographical walk through on the application of statistics tools evaluating risk in investment and demonstrating, through the published literature, the validity of these tools in the economic area.

Keywords: Statistic, Risk, Investiment Analysis.

1. Introdução

O presente artigo revê de forma breve as teorias do risco e de alguns métodos estatísticos, considerando por meio de modelos teóricos a contribuição de algumas ferramentas estatísticas no estudo da análise de risco em investimentos.

Pode-se considerar a procura constante por oportunidades de investimento como um dos principais objetivos do administrador financeiro (RENYI e LINITZ, 1999).

Certamente a noção de risco como sinônimo de grau de incerteza em relação a eventos futuros não é recente na história da humanidade. No entanto, somente a partir do desenvolvimento do cálculo de probabilidades e da estatística criaram-se condições para que o risco pudesse ser tratado de forma quantitativa, em oposição ao enfoque predominante qualitativo que o caracteriza. O risco seria, então, igual à somatória da probabilidade dos eventos do tipo "fracasso" (GALDÃO e FAMÁ, 1998).

É plenamente estabelecido que a estatística, apesar de não ser uma teoria matemática com uma bem definida estrutura axiomática, engloba muitos interessantes aspectos, sendo fundamental na análise de dados provenientes de quaisquer processos onde exista variabilidade. É usual dividir-se a estatística em três grandes áreas, embora não se trate de ramos isolados: *amostragem e planejamento de experimentos*, que é o mecanismo da coleta de dados; *estatística descritiva*, que se ocupa da organização, apresentação e sintetização de dados; *estatística inferencial*, que constitui o conjunto de métodos para a tomada de decisões, nas situações onde existem incerteza e variação (SOARES, FARIAS E CÉSAR, 1991).

2. Risco Definido como uma Probabilidade

Sabe-se que o processo decisório tem como principal finalidade chegar a um objetivo prefixado. Admite-se que *sucessos* e *fracassos* constituem uma partição de conjunto dos possíveis resultados que podem ocorrer, quando na tentativa de atingir-se os objetivos; então será definido *risco* como a probabilidade de ocorrerem os fracassos (SECURATO, 1993). Sendo U o conjunto de resultados, S o conjunto de sucessos e F o de fracassos, com $F \cup S = U$ e $F \cap S = \emptyset$, então a definição formal de risco será dada pela igualdade:

$$\text{RISCO} = P(F).$$

Como a soma das probabilidades de sucessos e fracassos é 1, ou seja, $P(F) + P(S) = 1$, também pode-se escrever:

$$\text{RISCO} = 1 - P(S).$$

Na área financeira, o risco e a incerteza estão presentes em um grande número de decisões do executivo que, em seu conjunto, podem levá-lo ao fracasso ou ao sucesso e, com ele, a própria empresa.

A teoria financeira aceita de forma ampla a variância dos possíveis resultados como medida de risco, sendo possível atribuir um número a um conceito tratado de forma qualitativa. Encare por exemplo um investidor que disponha de R$1000,00 podendo optar por um dos dois investimentos mostrados na tabela 1. Aparentemente, o risco do investimento 2 é muito maior que o risco do investimento 1, porque o desvio padrão de 2 é maior que 1. Porém, como pode ser o investimento 2 mais arriscado, se o pior evento possível em 2 iguala-se ao melhor evento possível em 1? Tentando evitar este tipo de problema, propõe-se a utilização do coeficiente de variação, definido como a razão entre o desvio-padrão e a média dos retornos esperados. Neste critério, deve ser escolhido o ativo com menor risco relativo ao retorno esperado, em outras palavras, com o menor coeficiente de variação. Mas, como mostra a última coluna da tabela 1, mesmo a utilização do coeficiente de variação leva, neste exemplo, a uma decisão inadequada (GALDÃO e FAMÁ, 1998).

Investimento	Retornos Possíveis	Probabilidade	Média	Desvio Padrão	Coeficiente de variação
1	R$1.050,00	50%	R$1.075,00 (7,5%)	R$25,00 (2,5%)	33,3% (0,025/0,075)
	R$1.100,00	50%			
2	R$1.100,00	80%	R$1.200,00 (20%)	R$200,00 (20%)	100,0% (0,2/0,2)
	R$1.600,00	20%			

Tabela 1: Comparação de duas Alternativas de Investimento.

Fonte: GALDÃO e FAMÁ (1998).

Através do conceito de risco como probabilidade:

- Aceitando os eventos e probabilidades listados como no exemplo e admitindo como sucesso apenas a melhor hipótese do evento 1, então o risco da operação será:
  RISCO = 1 – $P(S)$ = 1 – P(evento 1) = 1 – 0.50 , assim, RISCO = 50 %
- Aceitando os eventos e probabilidades admitindo como sucesso apenas a melhor hipótese do evento 2, então o risco da operação será:
  RISCO = 1 – $P(S)$ = 1 – P(evento 2) = 1 – 0.20 , assim, RISCO = 80 %

Portanto o evento 2 possui probabilidade de risco maior em comparação com o evento 1.

3. Risco Definido como Desvio-Padrão

Parte-se do princípio de que "dada uma distribuição de probabilidades de uma variável aleatória objetivo a decisão será tomada com base na média da distribuição". Ao tomar-se uma decisão levando em consideração o valor médio da distribuição, correrá-se o risco de que esta média não seja representativa da distribuição (SECURATO, 1993). Por definição, este risco é o desvio-padrão da variável objetivo:

$$\text{RISCO} = S_x \,.$$

Nestas condições deve-se tomar a decisão com base na média μ_x e no risco S_x . O conceito de risco, neste caso, procura captar o efeito da distribuição de probabilidades sobre a variável objetivo, levando em conta os eventos que correspondem a fracassos, sucessos ou aqueles que não deseja-se classificar nestes extremos. Este fato permite maior sensibilidade de análise do problema; pode-se examinar, por exemplo, como se comporta a variável objetivo em condições extremas $\mu_x + S_x$ ou $\mu_x - S_x$.

Quando se trata de decisões financeiras, o conceito de risco pode apresentar-se de várias formas. Duas situações são de particular importância: a variável objetivo é um valor futuro ou é uma taxa de juros. Naturalmente, sempre poderá ser obtida a equivalência das formas.

4. Modelo Teórico

A probabilidade está intimamente ligada ao risco e é necessariamente usada no cálculo de retorno de investimentos (SAMUELSON, 1997).

Um estudo com enfoque na medida de probabilidade de Risco-Neutro e Ausência de Arbitragem, conforme SIQUEIRA (1999), considera o seguinte exemplo: Um indivíduo quer investir hoje (*t*) e receber um retorno numa data futura (*r*). No futuro (*F*) poderão ocorrer somente três estados da natureza: depressão (w_1), normalidade (w_2), prosperidade (w_3). Este estudo também considera que o mercado de valores mobiliários tem disponível apenas um ativo financeiro com risco, ou seja, a ação 1 que retorna R$ 1,00 se ocorrer depressão, R$ 2,00 se ocorrer normalidade e R$ 3,00 se ocorrer prosperidade. Na forma de matriz temos:

$$r_1\,(F) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

No instante *t*(agora) a ação vale $s_1(t)$ e é um escalar.

Se compararmos *x* ações estaremos comparando o seguinte padrão de retornos:

$$\mathrm{x} \times \mathrm{r}_1\,(\mathrm{F}) = \begin{bmatrix} 1x \\ 2x \\ 3x \end{bmatrix}$$

Entretanto, se o mercado disponibilizar um ativo financeiro livre de risco 2, então o padrão de retornos desejado poderá ser reproduzido. Um ativo financeiro livre de risco possui o mesmo retorno para todos estados da natureza.

$$[\,\mathrm{r}_1(\mathrm{F})\ \ \mathrm{r}_2(\mathrm{F})] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo o padrão de retorno que os dois ativos financeiros podem gerar é:

$$x \times r_1(F) + y \times r_2(F) = \begin{bmatrix} x + y \\ 2x + y \\ 3x + y \end{bmatrix}$$

A inclusão de um terceiro ativo financeiro que seja apenas uma combinação linear da ação e do ativo livre do risco não altera a situação anterior. Mas a inclusão de um terceiro ativo financeiro, com risco e um padrão de retorno que não pode ser gerado pelos dois anteriores, é capaz de resolver o problema da reprodução do padrão de retornos desejado.

$$r(F) = [r_1(F)\ \ r_2(F)\ \ r_3(F)] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = [r_{ij}]$$

Logo $(x;y;z)=(1;-2;1)$ reproduz o padrão de retornos desejado.

Note que os três vetores de preço são linearmente independentes. Se $x=-1;\ y=3;\ z=-2$, então o padrão de retornos $[\ 0\ \ 1\ \ 0\ ]^F$ pode ser gerado também. Isto implica que qualquer padrão pode ser gerado com três padrões linearmente independentes. Então pode-se utilizar a seguinte matriz de retornos no lugar da anterior:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Desta forma torna-se evidente que qualquer padrão de retorno pode ser reproduzido, pois basta comprar x do primeiro ativo, y do segundo e z do terceiro.

Sempre que o número de ativos financeiros linearmente independentes for igual ao número de estados da natureza qualquer padrão de retornos pode ser reproduzido e o mercado nesta situação chama-se completo. Ele é denominado completo porque nenhum outro ativo financeiro com padrão de retorno diferentes, ou seja, que não é mera combinação linear dos retornos dos ativos anteriores pode ser gerado.

Para os valores imobiliários Arrow-Debreu, um mobiliário que retorna R$ 1,00 se um estado da natureza ocorrer, pode-se gerar para o mercado completo, o espaço dos ativos reais gerados pelos direitos contingenciais $\pi_1(F)$, $\pi_2(F)$ e $\pi_3(F)$, um para cada estado da natureza:

$$\pi_1(\mathrm{F}) = \begin{bmatrix} 1,\ se\ ocorrer\ w_1 \\ 0,\ caso\ contrário \\ 0,\ caso\ contrário \end{bmatrix}$$

$$\pi_2(\mathrm{F}) = \begin{bmatrix} 0,\ caso\ contrário \\ 1,\ se\ ocorrer\ w_2 \\ 0,\ caso\ contrário \end{bmatrix}$$

$$\pi_3(\mathrm{F}) = \begin{bmatrix} 0,\ caso\ contrário \\ 0,\ caso\ contrário \\ 1,\ se\ ocorrer\ w_3 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\pi(F) = [\pi_1(F)\ \ \ \pi_2(F)\ \ \ \pi_3(F)] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considerando o mercado completo e utilizando princípios da arbitragem, pode-se inferir os preços dos direitos contingenciais a partir dos preços dos ativos reais. Em termos de álgebra linear deseja-se formar os preços da base ortogonal de vetores unitários de espaço de retornos.

Utilizando-se resultados anteriores e aplicando o princípio da arbitragem temos que o preço no instante t do ativo Arrow-Debreu que ocorre no estado da natureza 1deve ter o mesmo valor do preço do ativo 3, pois eles têm o mesmo padrão de retornos em *f* (futuro). Assim:

$$\begin{aligned}
\pi_1(t) &= 0 \times s_1(t) + 0 \times s_2(t) + 1 \times s_3(t)\\
\pi_2(t) &= -1 \times s_1(t) + 3 \times s_2(t) - 2 \times s_3(t)\\
\pi_3(t) &= 1 \times s_1(t) - 2 \times s_2(t) + 1 \times s_3(t)
\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{aligned}
s_1(\mathrm{t}) &= 1 \times \pi_1(t) + 2 \times \pi_2(t) + 3 \times \pi_3(t)\\
s_2(\mathrm{t}) &= 1 \times \pi_1(t) + 1 \times \pi_2(t) + 1 \times \pi_3(t)\\
s_3(\mathrm{t}) &= 1 \times \pi_1(t) + 0 \times \pi_2(t) + 0 \times \pi_3(t)
\end{aligned}$$

De maneira genérica temos:

$$s(t) = [s_1(t) \;\; s_2(t) \;\; s_3(t)]$$

$$\pi(t) = \begin{bmatrix} \pi_1(t) \\ \pi_2(t) \\ \pi_3(t) \end{bmatrix}$$

$$r(F) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$s(t) = [\pi(t)]^T \; r(F)$$

$$[\pi(t)]^T = s(t)\,[r(F)]^1$$

onde A^T = matriz transposta

A^{-1} = matriz inversa

Observa-se que a dos retornos dos valores imobiliários Arrow-Debreu reproduz um ativo livre de risco, então, por arbitragem, temos que o preço do ativo livre de risco deve ser igual a soma dos preços dos valores mobiliários Arrow-Debreu:

$$r_3(F) = \sum_{i-1}^{3} \pi_i(F)$$

Como o preço do ativo livre de risco é o inverso de 1 mais a taxa livre de risco ao período, então:

$$s_2(t) = \sum_{i-1}^{3} \pi_i(t)$$

Multiplicando ainda os dois lados por *Colocar* temos:

$$s_2(t) = \sum_{i-1}^{3} \pi_i(t) = \frac{1}{1 + r_j}$$

Chamaremos $Q(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \end{bmatrix}$ de probabilidade sintética ou risco neutro.

Portanto, uma nova maneira de determinar o preço racional e único de um ativo surge:

$$\mathrm{Sj}(t) = \sum_{i-1}^{3} \pi_i(t) r_{ij}(F)$$

$$= \sum_{i-1}^{3} \frac{q_i(t)}{(1+r_j)^{Tij}} (F)$$

$$= \frac{1}{(1+r_j)} \sum_{i-1}^{3} q_i(t)\ (F)$$

$$= \frac{1}{(1+r_j)} E_{Q(t)}[R_j(F)]$$

$$= VP_{rj}\ \{ E_{Q(t)}\ [\ R_j(F)]\}$$

Portanto, o preço livre de arbitragem e único de um valor mobiliário num mercado completo é o valor presente do valor esperado dos retornos na medida de probabilidade de risco neutro $Q(t)$.

SECURATO, ABE e ZIRUOLO (1999), fazem avaliação de fundos utilizando indicadores que relacionam risco e retorno para fundos de renda fixa. Estes indicadores apresentam bons resultados para o caso de fundos com ações, possibilitando diferenciá-lo sem termo de vários critérios. Entretanto, em termos de fundos de renda fixa, estes indicadores são todos de valores muito próximos para todos os fundos. Provavelmente os erros de aproximação nos cálculos envolvidos sejam até maiores, em muitos casos, que as diferenças entre os fundos de renda fixa, para um mesmo índice. Daí a necessidade de obtermos indicadores próprios para os fundos de renda fixa. Os índices utilizados são o índice M^2 e o indicador *w*.

O índice M^2 procura propor uma carteira composta pelo ativo em análise e pelo ativo livre de risco do mercado. Este índice é dado pela diferença entre o retorno desta carteira e o retorno do mercado. Ao calcularmos o índice M^2 consideramos a carteira formada pelo ativo de mínimo risco ou livre de risco (para o mercado brasileiro é considerado o índice CDI). O retorno da carteira é dado por:

I_c= retorno médio da carteira pelo ativo CDI e pelo fundo analisado.

I_{FUNDO} = retorno médio do fundo analisado.

I_{CDI} = retorno médio do CDI.

W_1, W_2= Composição da carteira entre CDI e o fundo.

A equação de risco da carteira é dado por:

$$\mathbf{S^2(C)=W^2{}_1S^2(CDI)+W_2{}^2S^2(Fundo)+2W_1W_2cov(I_{CDI}, I_{FUNDO})}$$

$S^2(C)$ =Variância do retorno da carteira.

$S^2(CDI)$ = Variância do retorno da CDI.

$S^2(Fundo)$ = Variância do retorno do retorno do fundo.

$cov(I_{CDI}, I_{FUNDO})$= Covariância entre os retornos do CDI e do Fundo.

O indicador $W(W_1, W_2, W_3)$ leva em consideração três indicadores sintéticos de risco (W_1, W_2, W_3) do fundo de renda fixa, onde:

$W_{1:}$ Composição sintética de ativos que rendem a taxa básica da economia.

$W_{2:}$ Composição sintética de câmbio, do fundo de renda fixa.

$W_{3:}$ Composição sintética do mercado.

A proposta deste indicador é definir uma carteira sintética cujo retorno médio e risco é dados por:

Retorno da carteira Sintética:

$$\mathbf{R_s=W_1R_{TB}+W_2R_c+W_3R_M}$$

R_s = retorno médio da carteira sintética.

R_{TB} =retorno médio da taxa básica da economia.

R_c=retorno médio do câmbio em moeda local, relativo ao dólar para o caso brasileiro.

R_M = re5torno médio da carteira de Mercado, representado pelo Ibovespa.

Risco da carteira sintética:

$$S^2(Rs) = W_1^2 S^2(R_{IB}) + W_2^2 S^2(Rc) + W_3^2 S^2(Rm) + 2W_1W_2 cov(R_{IB}, R_c) + 2W_1W_3 cov(R_{IB}, R_M) + 2W2W_3 cov(R_c, R_m)$$

$S^2(Rs)$ =Variância do retorno da carteira sintética.
$S^2(R_{IB})$ =Variância do retorno da taxa básica da economia.
$S^2(Rc)$ =Variância do retorno do câmbio em moeda local, relativo ao dólar para o caso brasileiro.
$S^2(Rm)$ =Variância do retorno da carteira de mercado representado pelo Ibovespa.
$cov(R_{IB}, R_c)$ =Covariância entre os retornos da taxa básica da economia e do câmbio em moeda local.
$cov(R_{IB,} R_M)$ = Covariância entre os retornos da taxa básica da economia e da carteira de mercado.
$cov(R_c, R_m)$ = Covariância entre os retornos do câmbio em moeda local e da carteira de mercado.

Com este modelo pode-se estudar uma categoria de fundos de renda fixa do mercado de forma a obter o indicador (W_1,W_2,W_3) para cada um dos fundos , e, desta forma analisar seus componentes de risco. É importante frisar que para cada fundo teremos dois títulos sintéticos possíveis, devido às características próprias de uma equação de 2° grau, o qual é solução da equação de investimento e risco.

5. Conclusão

A análise de risco em investimento ocupa um lugar importante na decisão de qual alternativa investir. Ao longo deste artigo procurou-se mostrar alguns modos de se quantificar o risco. Uma vez quantificado o risco fica mais fácil verificar a fundo as características de certo investimento. Neste processo a estatística fornece ferramentas capazes de avaliar o risco levando em conta incertezas, variabilidade e lucratividade.

6. Agradecimentos

À CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – órgão financiador de bolsas, pelo apoio financeiro que possibilita uma dedicação exclusiva à pesquisa.

7. Referências Bibliográficas

- GALDÃO, Almir, e FAMÁ, Rubens. *A Influência das Teorias do Risco, da Alavancagem e da Utilidade nas Decisões de Investidores e Administradores*. III SEME*AD* – Seminários em Administração da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da USP - São Paulo, 1998.
- RENYI, Liliane, e LINTZ, Alexandre,. *Análise do Mercado Financeiro Internacional Um Panorama de Investimentos no Brasil.* IV SEME*AD* – Seminários em Administração da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da USP – São Paulo, 1999.
- SAMUELSON, P. A., *Estimating Probabilities Relevant to Calculating Relative Risk-Corrected Returns ofAlternative Portfólios.* Journal of Risk and Uncertainty, vol 15, nr 3, pp 191-200, 1997.
- SECURATO, J. R., ABE, E. R. e ZIRUOLO,V. M. *Avaliação dos Componenetes de Risco dos fundos de Renda Fixa.* IV SEME*AD* - Seminários em Administração da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da USP – São Paulo, 1999

- SECURATO, J. R.. *Decisões Financeiras em Condições de Risco.* Editora Atlas S.A., São Paulo, 1993.
- SIQUEIRA, José de Oliveira. *Existência e Unicidade da Medida de Probabilidade Risco-Neutro sob a Hipótese de Mercado Completo Uniperíodo*. IV SEME*AD* – Seminários em Administração da Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade da USP – São Paulo, 1999.
- SOARES, José Francisco, FARIAS, Alfredo A. de e CESAR, Cibele Comini. *Introdução à Estatística*. Guanabara Koogan, Rio de Janeiro, 1991.