

MÉTODO DE PONDERAÇÃO BASEADO EM ENTROPIA PARA OTIMIZAÇÃO MULTIOBJETIVO

LUIZ CELIO SOUZA ROCHA (UNIFEI)

luizrochamg@hotmail.com

Anderson Paulo de Paiva (UNIFEI)

andersonppaiva@yahoo.com.br

Pedro Paulo Balestrassi (UNIFEI)

ppbalestrassi@gmail.com

Paulo Rotela Junior (UNIFEI)

paulo.rotela@gmail.com

Edson de Oliveira Pamplona (UNIFEI)

pamplona@unifei.edu.br



Em situações práticas, normalmente se tem mais de uma função objetivo a ser analisada de maneira sistemática e simultânea para a resolução de determinado problema, levando à otimização multiobjetivo. Neste contexto, o tomador de decisão e suas informações de preferência apresentam papel fundamental, pois, a fim de definir a importância relativa de cada função objetivo, o tomador de decisão deve atribuir-lhes pesos diferentes. Desta forma, surge a seguinte questão de pesquisa: como auxiliar o tomador de decisão na escolha da melhor ponderação ao se trabalhar com otimização multiobjetivo? O presente trabalho busca propor um método que possa identificar os pesos ótimos envolvidos em uma formulação multiobjetivo, utilizando para tanto uma abordagem Normal Boundary Intersection (NBI) juntamente com projeto de experimento de misturas, tendo as funções de

Entropia e de Erro Percentual Global (EPG) como critérios de seleção dos pesos ótimos. Para demonstrar sua aplicabilidade, empregou-se o método para otimizar o processo de torneamento vertical de anéis de pistão de ferro fundido cinzento martensítico, maximizando a produtividade e a vida da ferramenta de corte e minimizando o custo, usando como variáveis de decisão o avanço e a rotação da ferramenta de corte. Os objetivos de otimização propostos foram alcançados com Avanço=0,37 mm/rot. e Rotação=250 rpm. Assim, as principais contribuições do presente trabalho foram a proposição de um método estruturado, diferenciado em relação às técnicas encontradas na literatura, para a identificação de pesos ótimos em problemas multiobjetivo e a possibilidade de visualização do resultado ótimo na fronteira de Pareto do problema, sendo esta última uma informação de grande relevância para uma gestão mais eficiente dos processos.

Palavras-chave: Fronteira de Pareto, Pesos Ótimos, Arranjos de Misturas, Índice de Entropia de Shannon, Erro Percentual Global.

1. Introdução

Segundo Rao (2009), otimização é o ato de obter o melhor resultado sob dadas circunstâncias. Neste contexto, o objetivo principal da tomada de decisões em processos industriais é minimizar o esforço requerido ao desenvolvimento de determinada tarefa ou maximizar o benefício desejado.

Porém, em situações práticas, normalmente se tem mais de uma função objetivo a ser analisada de maneira sistemática e simultânea para a resolução de determinado problema, levando à otimização multiobjetivo (HUANG *et al.*, 2006).

Nos problemas multiobjetivo, é muito pouco provável que exista uma solução ótima x^* que minimize todas as funções de maneira simultânea. No geral, os múltiplos objetivos apresentam conflitos de interesse. Portanto, o conceito de solução Pareto-ótima passa a ser de grande relevância para esses tipos de problema. De acordo com Rao (2009), uma solução viável x^* é denominada Pareto-ótima se não existe outra solução viável z tal que $f_i(z) \leq f_i(x^*)$, $i=1,2,\dots,m$, com $f_j(z) < f_j(x^*)$ em pelo menos um objetivo j .

Neste contexto, o tomador de decisão e suas informações de preferência apresentam papel fundamental, pois, a fim de definir a importância relativa de cada função objetivo, o tomador de decisão deve atribuir-lhes pesos diferentes (ESKELINEN; MIETTINEN, 2011).

Uma vez que o problema de ponderação da função objetivo é a propriedade característica da otimização multiobjetivo, a maneira como um tomador de decisão está envolvido com a solução deste problema é a base para a sua classificação. De acordo com Hwang e Masud (1979) e Miettinen (1999), as classes são: 1. métodos sem preferência: métodos onde nenhuma articulação de informações de preferência é feita; 2. métodos *a priori*: métodos onde o tomador de decisão seleciona a ponderação antes de executar o algoritmo de otimização; 3. métodos interativos: métodos onde o tomador de decisão interage com o programa de otimização durante o processo de otimização; e 4. métodos *a posteriori*: métodos onde nenhuma ponderação é especificada pelo usuário antes ou durante o processo de otimização. No entanto, como nenhuma classificação pode ser completa, estas não são absolutas. Sobreposições e combinações de classes são possíveis e alguns métodos podem ser

considerados como pertencentes a mais de uma classe (MIETTINEN, 1999). Este artigo considera um método *a posteriori* em consonância com a abordagem *generate first-choose later* (MESSAC; MATTSON, 2002).

Um problema multiobjetivo é geralmente resolvido por reduzi-lo a um problema de otimização escalar, portanto, utiliza-se o termo escalarização. Escalarização é a conversão do problema, por agregação dos componentes das funções objetivo, em um problema de otimização com uma função objetivo (HWANG; MASUD, 1979). A literatura nos apresenta diversos métodos de escalarização. O mais comum é o método de somas ponderadas.

O método de somas ponderadas é amplamente empregado para gerar soluções *trade-off* em problemas de otimização multiobjetivo não lineares. De acordo com Shin *et al.* (2011), um problema bi-objetivo é convexo se o conjunto viável X é convexo e as funções são também convexas. Quando ao menos uma função objetivo é não-convexa, o problema bi-objetivo se torna não-convexo, gerando uma fronteira de Pareto não-convexa e descontínua. A principal consequência de uma fronteira de Pareto não-convexa é que pontos na parte côncava não são estimados (DAS; DENNIS, 1997). Essa instabilidade ocorre devido ao fato de que a soma ponderada não é uma função Lipshitziana do peso utilizado (VAHIDINASAB; JADID, 2010). Outra desvantagem das somas ponderadas está relacionada à distribuição uniforme das soluções Pareto-ótimas, uma vez que, até quando se utiliza vetores de pesos uniformemente distribuídos, a fronteira de Pareto gerada não é nem equispçada, nem uniformemente distribuída (DAS; DENNIS, 1997, VAHIDINASAB; JADID, 2010).

Devido a essas desvantagens, o método de somas ponderadas não é utilizado neste trabalho. Ao invés disso, é empregado um método de métrica ponderada, como citado por Ardakani e Noorossana (2008), em associação com o método de Interseção Normal à Fronteira (*Normal Boundary Intersection* – NBI), como proposto por Das e Dennis (1998). Das e Dennis (1998) propuseram o método NBI para superar as desvantagens do método de somas ponderadas, mostrando que com este método a fronteira de Pareto é uniformemente distribuída independentemente das escalas relativas das funções objetivo.

No processo de otimização multiobjetivo, o tomador de decisão, como mencionado anteriormente, desempenha papel importante, pois é o tomador de decisão que, cedo ou tarde, obtém uma simples solução a ser usada como a solução para seu problema multidisciplinar

original. Assim, surge a seguinte questão de pesquisa: como auxiliar o tomador de decisão na escolha da melhor ponderação ao se trabalhar com otimização multiobjetivo?

Para responder tal pergunta, propõe-se o uso de dois critérios de seleção objetivamente definidos: o Índice de Entropia de Shannon (1948) e o Erro Percentual Global (EPG). Entropia pode ser definida como uma medida de incerteza probabilística. Seu uso é indicado em situações onde as distribuições de probabilidade são desconhecidas, buscando a diversificação. Entre as muitas desejáveis propriedades do Índice de Entropia, destacam-se as seguintes: possui medida não negativa e é uma função côncava. A primeira propriedade é desejável por garantir soluções não nulas e a segunda por ser mais fácil maximizar uma função côncava do que uma função não-côncava (FANG *et al.*, 1997). O EPG, como o próprio nome diz, é uma medida de erro. Neste caso, deseja-se avaliar a distância entre determinada solução Pareto-ótima e seu valor ideal.

Para demonstrar sua aplicabilidade, empregou-se o método para otimizar o processo de torneamento vertical de anéis de pistão de ferro fundido cinzento martensítico, que é um processo relativamente complexo de usinagem. Sendo uma operação de desbaste, esta é conduzida simultaneamente nos diâmetros externo e interno das peças. A usinagem é realizada usando duas ferramentas de corte gêmeas com geometria especial, sendo utilizada refrigeração abundante durante todo o processo de corte (SEVERINO *et al.*, 2012). De acordo com Wang *et al.* (2007), dos muitos tipos de ferro fundido usados pela indústria automobilística, o cinzento é o mais usado. Essa é a principal razão para estudar este processo. O que a indústria precisa é um condicionamento do processo que melhore a maquinabilidade do ferro fundido cinzento martensítico em operações de torneamento vertical de anéis de pistão. Para atender a esta necessidade, este artigo propõe uma otimização das condições de corte, maximizando a produtividade e a vida da ferramenta de corte e minimizando o custo, usando como variáveis de decisão o avanço e a rotação da ferramenta de corte, conforme proposto por Severino *et al.*, 2012.

2. Referencial teórico

2.1. Projeto e Análise de Experimentos

De acordo com Montgomery (2001), um experimento pode ser definido como um teste ou uma série de testes em que mudanças propositalmente são feitas nas variáveis de entrada de um

processo, com o objetivo de observar a forma como as respostas são afetadas pelas mudanças provocadas. O Projeto e Análise de Experimentos (Design of Experiments – DOE) é então definido como o processo de planejamento dos experimentos para que dados apropriados sejam coletados e depois analisados por métodos estatísticos, resultando em conclusões válidas e objetivas (MONTGOMERY, 2001).

Segundo Montgomery (2001), os três princípios básicos do DOE são: aleatorização, replicação e blocagem. A aleatorização consiste na execução dos experimentos em ordem aleatória para que os efeitos desconhecidos dos fenômenos sejam distribuídos entre os fatores, aumentando assim a validade da investigação. A replicação é a repetição de um mesmo teste várias vezes, criando uma variação na resposta que é usada para a avaliação do erro experimental. A blocagem deve ser utilizada quando não for possível manter a homogeneidade das condições experimentais. Esta técnica permite avaliar se a falta de homogeneidade interfere nos resultados.

As etapas do DOE são (MONTGOMERY, 2001): 1.Reconhecimento e declaração do problema; 2.Escolha de fatores, níveis e variações; 3.Seleção da variável de resposta; 4.Escolha do desenho experimental; 5.Execução do experimento; 6.Análise estatística dos dados; 7.Conclusões e recomendações.

Com relação aos projetos experimentais, as técnicas mais utilizadas compreendem o planejamento fatorial completo, o planejamento fatorial fracionado, os arranjos de Taguchi, a Metodologia de Superfície de Resposta e os experimentos de misturas (MONTGOMERY, 2001).

Nos experimentos de mistura, os fatores são componentes ou ingredientes de uma mistura, e conseqüentemente, seus níveis não são independentes. Por exemplo, se x_1, x_2, \dots, x_p indicam as proporções de p componentes de uma mistura, então $\sum_{i=1}^p w_i = 1$ (MONTGOMERY, 2001). O arranjo mais utilizado para planejar e conduzir experimentos de misturas são os arranjos simplex (CORNELL, 2002).

Uma desvantagem dos arranjos simplex diz respeito ao fato de que a maioria dos experimentos ocorre nas fronteiras do arranjo, o que faz com que poucos pontos da parte interna sejam testados. Assim, recomenda-se, sempre que possível, aumentar o número de

experimentos através da adição de pontos internos aos arranjos, como os pontos centrais e também os pontos axiais. No caso dos arranjos de misturas, vale destacar que os pontos centrais correspondem ao próprio centróide.

2.2. Abordagem de Interseção Normal a Fronteira

O método de Interseção Normal à Fronteira (*Normal Boundary Intersection* – NBI) é uma rotina de otimização desenvolvida para encontrar soluções Pareto-ótimas uniformemente distribuídas para um problema multiobjetivo não-linear (DAS; DENNIS, 1998, SHUKLA; DEB, 2007). O primeiro passo no método NBI compreende o estabelecimento da matriz *payoff* Φ , baseado no cálculo dos mínimos individuais de cada função objetivo. A solução que minimiza a i -ésima função objetivo $f_i(x)$ pode ser representada como $f_i^*(x_i^*)$. Quando substitui-se o ótimo individual x_i^* nas funções objetivo restantes, tem-se $f_i(x_i^*)$. Em notação matricial, a matriz *payoff* Φ pode ser escrita como:

$$\Phi = \begin{bmatrix} f_1^*(x_1^*) & \cdots & f_1(x_i^*) & \cdots & f_1(x_m^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_i(x_1^*) & \cdots & f_i^*(x_i^*) & \cdots & f_i^*(x_m^*) \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_m(x_1^*) & \cdots & f_m(x_i^*) & \cdots & f_m^*(x_m^*) \end{bmatrix} \quad (1)$$

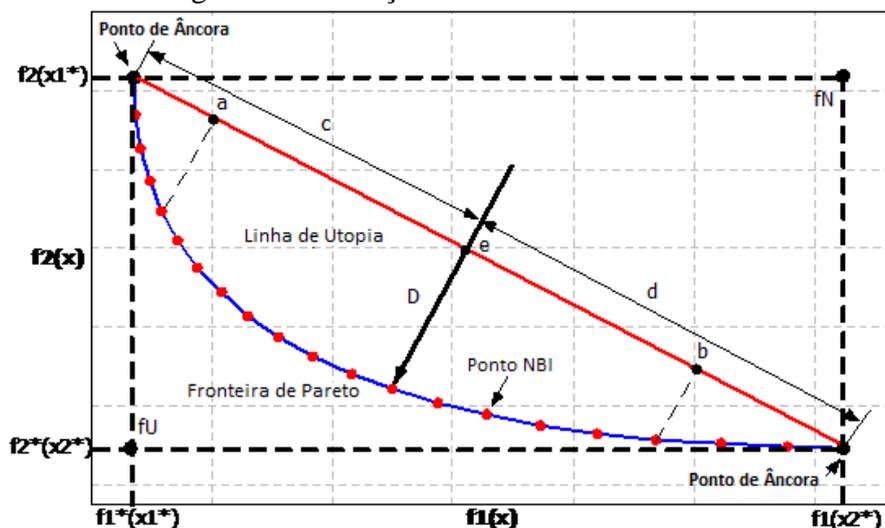
O ponto de Utopia é obtido pelo vetor com todos os mínimos individuais: $f^U = [f_1^*(x_1^*) \quad \dots \quad f_i^*(x_i^*) \quad \dots \quad f_m^*(x_m^*)]^T$. Juntando os valores máximos de cada função objetivo, $f^N = [f_1^N \quad \dots \quad f_i^N \quad \dots \quad f_m^N]^T$, obtém-se um conjunto chamado de ponto de Nadir.

De acordo com Vahidinasab e Jadid (2010), as combinações convexas de cada linha da matriz *payoff* formam a “Envoltória Convexa de Mínimos Individuais” (*Convex Hull of Individual Minima* – CHIM) ou a linha de Utopia (UTYUZHNIKOV *et al.*, 2009). O ponto de âncora corresponde à solução da otimização simples do problema $f_i^*(x_i^*)$ (JIA; IERAPETRITOU, 2007, UTYUZHNIKOV *et al.*, 2009). A linha de Utopia liga os pontos de âncora.

Considere agora uma ponderação convexa w , tal que Φw_i representa um ponto na CHIM e \hat{n} denota a unidade de direção normal (um vetor coluna de números 1) para a CHIM do ponto

Φ_{w_i} para a origem; então $\Phi_{w+D\hat{n}}$, com $D \in \mathbb{R}$, representa o conjunto de pontos naquela normal (JIA; IERAPETRITOU, 2007, SHUKLA; DEB, 2007). A Figura 1 representa graficamente o Método NBI.

Figura 1 - Descrição Gráfica do Método NBI



Fonte: adaptado de Vahidinasab e Jadid (2010), Jia e Ierapetrinou (2007).

O ponto de interseção entre a normal e a fronteira da região viável mais próximo da origem corresponde à maximização da distância entre a linha de Utopia e a fronteira de Pareto. Este problema de otimização pode ser iterativamente resolvido para diferentes valores de w , criando uma fronteira de Pareto uniformemente distribuída. Uma escolha comum para w é sugerida por Jia e Ierapetrinou (2007) como $w_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} w_i$. Então, o problema de otimização pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \text{Max}_{(x,D)} \quad & D \\ \text{sujeito a : } \quad & \bar{\Phi}w + D\hat{n} = \bar{F}(x) \\ & x \in \Omega \end{aligned} \quad (2)$$

3. Metamodelagem

A análise dos métodos de ponderação de múltiplas respostas demonstra que contribuições significativas ainda podem ser feitas com relação a este tema, visto que boa parte das estratégias ainda se utiliza de elementos passíveis de erro. Isto se deve ao fato de que, muitas das técnicas utilizadas recorrem, em pelo menos uma de suas etapas, a elementos imprecisos e subjetivos.

Com o intuito de contribuir com este tema, desenvolve-se uma alternativa para a identificação dos pesos ótimos em problemas de otimização multiobjetivo. Para a modelagem das funções objetivo, os métodos estatísticos baseados no DOE são técnicas importantes, uma vez que as relações matemáticas não são conhecidas para a maioria dos processos industriais. A inserção dos algoritmos de otimização ocorre na etapa de identificação das soluções ótimas para as respostas e para os pesos, após os mesmos serem modelados pelas técnicas estatísticas anteriormente citadas. O algoritmo GRG foi utilizado, através da função Solver do Excel®. A abordagem NBI, também é utilizada na busca dos pesos ótimos, utilizando como critério de seleção as funções de EPG e Entropia.

Para o alcance da metodologia de ponderação proposta neste trabalho os seguintes procedimentos foram utilizados:

- Passo 1: Projeto Experimental (DOE)

Estabelecimento do planejamento experimental e execução dos experimentos em ordem aleatória.

- Passo 2: Modelagem das funções objetivo

Definição das equações usando os dados experimentais.

- Passo 3: Formulação do problema de otimização multiobjetivo

Uma vez definidas as funções objetivo, as mesmas são aglutinadas em uma formulação de otimização multiobjetivo seguindo a rotina (ARDAKANI; NOOROSSANA, 2008):

$$\begin{aligned} \text{Min } \bar{f}(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^m w_i \cdot \left[\frac{f_i(\mathbf{x}) - f_i^*(\mathbf{x})}{f_i^{\text{Max}} - f_i^{\text{Min}}} \right]^2 \\ \text{s.t.: } \mathbf{x}^T \mathbf{x} &\leq \rho^2 \\ 0 &\leq w_i \leq 1 \end{aligned} \quad (3)$$

Na Eq.(3), $\bar{f}(x)$ é a função objetivo global, $f_i^*(\mathbf{x})$ é o ponto ideal ou o melhor resultado individualmente possível e os valores f_i^{Min} e f_i^{Max} são obtidos na matriz *payoff* das funções objetivo. A expressão $\mathbf{x}^T \mathbf{x} \leq \rho^2$ descreve a restrição para uma região de solução esférica, onde ρ é o raio da esfera.

- Passo 4: Definição do arranjo de misturas

Com o intuito de definir os pesos a serem utilizados na rotina de otimização descrita no Passo 3, elabora-se um Arranjo de Misturas usando o software Minitab® 16. Devido à restrição $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, a utilização do Arranjo de Misturas é viável.

- Passo 5: Solução do problema de otimização

Solução do problema de otimização do Passo 3 para cada condição experimental definida no Passo 4.

- Passo 6: Cálculo do Erro Percentual Global (EPG) e da Entropia

Cálculo do Erro Percentual Global das respostas Pareto-ótimas, através da expressão:

$$EPG = \sum_{i=1}^m \left| \frac{y_i^*}{T_i} - 1 \right| \quad (4)$$

onde: y_i^* – Valores das respostas Pareto-ótimas

T_i – Alvos definidos

m – Número de objetivos

Com o intuito de diversificar os pesos da otimização multiobjetivo, o Índice de Entropia (SHANNON, 1948) é calculado, usando as respostas Pareto-ótimas, através da expressão:

$$S(x) = - \sum_{i=1}^m w_i \ln(w_i) \quad (5)$$

- Passo 7: Modelagem da função EPG e Entropia

Determinação do polinômio canônico de misturas para o EPG e para a Entropia, utilizando como fonte de dados os resultados dos cálculos do Passo 6.

- Passo 8: Formulação do problema de otimização multiobjetivo envolvendo as funções EPG e Entropia

Uma vez que as funções EPG e Entropia foram definidas, elas são agregadas em uma formulação de otimização multiobjetivo, usando a metodologia NBI, como a rotina descrita

na Eq. (2). Usando este método, é possível definir a fronteira de Pareto com soluções uniformemente distribuídas, independentemente da convexidade das funções.

- Passo 9: Definição dos pesos ótimos

Para alcançar os pesos ótimos, considera-se a seguinte rotina:

$$\begin{aligned} \text{Max } \xi &= \frac{\text{Entropia}}{\text{EPG}} \\ \text{s.t. : } \sum_{i=1}^n w_i &= 1 \\ 0 &\leq w_i \leq 1 \end{aligned} \quad (6)$$

Com esta rotina, maximiza-se a relação entre Entropia e EPG. Esses parâmetros são, nesta proposta, os critérios de seleção para os pesos ótimos.

Uma vez que esse procedimento foi realizado e os pesos ótimos encontrados, o problema multiobjetivo deve ser resolvido até se encontrar os valores ótimos para as variáveis de decisão no problema original.

4. Aplicação do Método Proposto

Com o intuito de aplicar o método proposto por este trabalho, utilizou-se os dados experimentais apresentados em Severino *et al.* (2012). Os autores tinham como objetivo otimizar um processo de torneamento vertical com a aplicação da metodologia de planejamento de experimentos (DOE), a fim de determinar a condição que conduzia a uma máxima vida da ferramenta de corte (mm), alta produtividade (peça/h) e mínimo custo (US\$/peça). Utilizando como variáveis de decisão o avanço (mm/rotação) e a rotação (rpm) da ferramenta de corte, foi realizado um arranjo fatorial completo 2^2 , com 4 pontos axiais e 5 pontos centrais, conforme proposto por Box e Drapper (1987), gerando, assim, 13 experimentos (Tabela 1).

Tabela 1 - CCD's para Vida da Ferramenta, Produtividade e Custo

N	Avanço (mm/rot.)	Rotação (rpm)	Vida da ferramenta (mm)	Produtividade (Pç/h)	Custo (\$/pç)
1	0,32	235	2102	1523	0,04686
2	0,38	235	2853	1712	0,03682
3	0,32	275	1802	1677	0,04474
4	0,38	275	1501	1847	0,04413
5	0,31	255	1652	1555	0,05019
6	0,39	255	1802	1813	0,04117
7	0,35	227	2853	1588	0,04047
8	0,35	283	1952	1807	0,03985
9	0,35	255	3153	1714	0,03562
10	0,35	255	3003	1713	0,03620
11	0,35	255	3303	1716	0,03509
12	0,35	255	2703	1709	0,03755
13	0,35	255	2853	1711	0,03684

Fonte: Severino *et al.* (2012, p.530).

As variáveis de decisão foram analisadas de maneira codificada (*coded*) com o intuito de reduzir a variância e somente no final das análises foram convertidas em seus valores reais (*uncoded*). Os parâmetros utilizados nos experimentos e seus respectivos níveis são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 - Parâmetros utilizados nos experimentos

Fatores	Níveis				
	-1,41	-1	0	1	1,41
Avanço (mm /rot.)	0,31	0,32	0,35	0,38	0,39
Rotação (rpm)	227	235	255	275	283

Fonte: Severino *et al.* (2012, p.528).

A análise dos dados experimentais descritos na Tabela 1 gerou a modelagem matemática apresentada na Tabela 3. Observa-se um excelente ajuste, uma vez que R^2 ajustado é superior a 90% para todas as respostas.

Tabela 3 - Modelos matemáticos para as funções objetivo

Termos	Vida da Ferramenta (mm)	Produtividade (Pç/h)	Custo (\$/Pç)
Constante	3003	1713	0,03626
Avanço	83	90	-0,00293
Rotação	-366	75	0,00054
Avanço*Avanço	-638	-15	0,00476
Rotação*Rotação	-300	-8	0,00200
Avanço*Rotação	-263	-5	0,00236
MSE		12,9	
P-value	0,003	0,000	0,000
Regressão (Quadrática)	0,000	0,000	0,000
Falta de ajuste	0,926	0,136	0,279
R ² ajustado (%)	91,10%	99,90%	94,30%
Normalidade dos resíduos	0,600	0,511	0,552

Fonte: Severino *et al.* (2012, p.530).

Com base nos dados apresentados na Tabela 3, inicia-se a aplicação do método de ponderação para otimização multiobjetivo proposto por este trabalho. É importante citar que, as Tabelas 1 e 3 equivalem aos passos 1 e 2, respectivamente, conforme descritos neste trabalho.

Para implementar a rotina de otimização descrita no Passo 3, calculou-se, inicialmente, a matriz *payoff*, obtendo-se os resultados descritos na Tabela 4.

Tabela 4 - Matriz *payoff* para as funções objetivo

Vida da Ferramenta (mm)	Produtividade (Pç/h)	Custo (\$/Pç)
3140*	1675	0,03612
1524	1850*	0,04298
3067	1718	0,03558*

* ótimos individuais.

Fonte: Dados da pesquisa, 2015.

Uma vez implementado o Passo 3, definiu-se um arranjo de misturas para os pesos de cada função objetivo (Passo 4) e obteve-se a solução do problema de otimização do Passo 3 para cada condição experimental definida pelo arranjo de misturas (Passo 5). Com base nestes resultados, foi calculado o EPG e a Entropia (Passo 6). Os resultados são apresentados na Tabela 5.

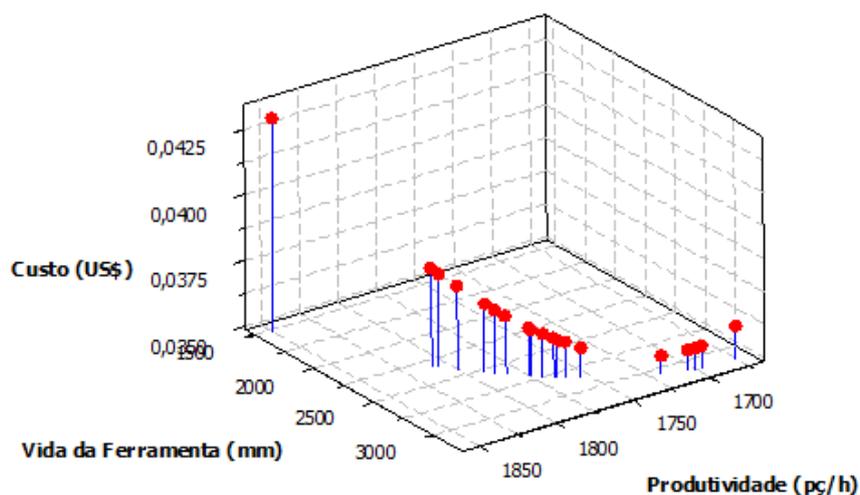
Tabela 5 - Arranjo de Misturas e Cálculo do EPG e da Entropia

Pesos			Vida da Ferramenta	Produtividade	Custo	EPG	Entropia
w_1	w_2	w_3					
1	0	0	3140	1675	0,03612	0,10974	-0,00002
0,75	0,25	0	2825	1762	0,03621	0,16567	0,56233
0,75	0	0,25	3122	1697	0,03572	0,09254	0,56233
0,5	0,5	0	2619	1784	0,03708	0,24373	0,69314
0,5	0,25	0,25	2790	1766	0,03634	0,17829	1,03972
0,5	0	0,5	3115	1700	0,03567	0,09139	0,69314
0,25	0,75	0	2346	1806	0,03840	0,35593	0,56233
0,25	0,5	0,25	2578	1788	0,03727	0,26009	1,03972
0,25	0,25	0,5	2751	1771	0,03650	0,19253	1,03972
0,25	0	0,75	3108	1704	0,03564	0,09089	0,56233
0	1	0	1524	1850	0,04298	0,72239	-0,00002
0	0,75	0,25	2312	1809	0,03857	0,37034	0,56233
0	0,5	0,5	2538	1791	0,03745	0,27609	0,69314
0	0,25	0,75	2711	1775	0,03667	0,20782	0,56233
0	0	1	3067	1718	0,03558	0,09440	-0,00002
0,333	0,333	0,333	2707	1776	0,03669	0,20946	1,09861
0,667	0,167	0,167	2876	1755	0,03602	0,14787	0,86756
0,167	0,667	0,167	2426	1800	0,03800	0,32233	0,86756
0,167	0,167	0,667	2801	1765	0,03630	0,17413	0,86756

Fonte: Dados da pesquisa, 2015.

A Figura 2 mostra a fronteira de Pareto obtida. O método de métrica ponderada (ARDAKANI; NOOROSSANA, 2008) usado no Passo 5 foi incapaz de produzir uma distribuição uniforme dos pontos Pareto-ótimos ao longo da fronteira. Esse inconveniente será superado como uso do método NBI (DAS; DENNIS, 1998).

Figura 2 – Fronteira de Pareto obtida com o método de métrica ponderada



A partir do cálculo do EPG e da Entropia, procedeu-se à modelagem matemática das funções (Passo 7):

$$\begin{aligned}
 GPE = & 0,108w_1 + 0,722w_2 + 0,095w_3 - 0,689w_1w_2 - 0,039w_1w_3 - 0,537w_2w_3 + \\
 & 0,629w_1w_2(w_1 - w_2) - 0,826w_2w_3(w_2 - w_3) + 3,696w_1w_2^2w_3 - \\
 & 0,493w_1w_2(w_1 - w_2)^2 - 0,338w_2w_3(w_2 - w_3)^2
 \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned}
 Entropy = & -0,002w_1 - 0,002w_2 - 0,002w_3 + 2,748w_1w_2 + 2,748w_1w_3 + 2,748w_2w_3 + \\
 & 5,355w_1^2w_2w_3 + 5,355w_1w_2^2w_3 + 5,355w_1w_2w_3^2 + 1,224w_1w_2(w_1 - w_2)^2 + \\
 & 1,224w_1w_3(w_1 - w_3)^2 + 1,224w_2w_3(w_2 - w_3)^2
 \end{aligned} \quad (8)$$

Para implementar a rotina de otimização multiobjetivo descrita no Passo 8, a matriz *payoff* foi estimada. Os resultados são mostrados na Tabela 6.

Tabela 6 - Matriz *payoff* para as funções EPG e Entropia

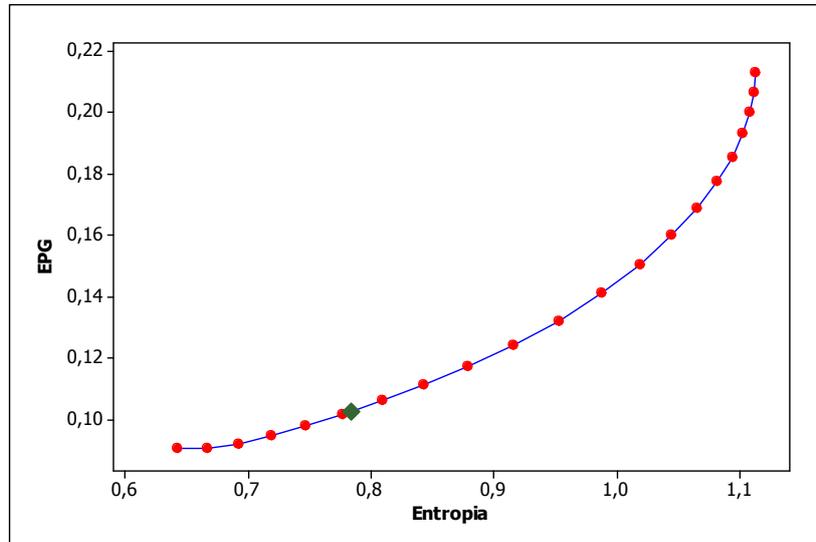
EPG	Entropia
0,090*	0,643
0,213	1,112*

* **ótimos individuais.**

Fonte: Dados da pesquisa, 2015.

Baseado na matriz *payoff*, foi possível implementar iterativamente a Eq. (2), escolhendo w na amplitude [0;1]. Usando esta equação e os parâmetros conforme descrito em Das e Dennis (1998), 21 pontos foram alcançados e a fronteira de Pareto foi construída, como apresentado na Figura 3, com destaque para o ponto ótimo alcançado com a metodologia proposta. Pela maximização de ξ (Passo 9), os pesos ótimos w_1 , w_2 e w_3 foram encontrados: w_1 (peso da Vida da ferramenta de corte) = 0,48766; w_2 (peso da Produtividade) = 0,03578; e w_3 (peso do Custo) = 0,47656.

Figura 3 – Fronteira de Pareto pelo método NBI



Esses pontos ótimos foram utilizados na otimização da vida da ferramenta de corte, produtividade e custo, como na Eq. (3), alcançando os valores de 3001, 1735 e 0,03566, respectivamente. Os valores ótimos das variáveis de decisão são: avanço = 0,37 mm/rot.; rotação = 250 rpm.

Para cada ponto apresentado na Figura 3, tem-se um conjunto de valores para os pesos. Esses pesos foram utilizados na otimização das funções objetivo. Os resultados do processo de otimização e a fronteira de Pareto com a indicação do ponto ótimo são apresentados na Figura 4 e na Tabela 7.

Figura 4 – Fronteira de Pareto obtida com a proposta

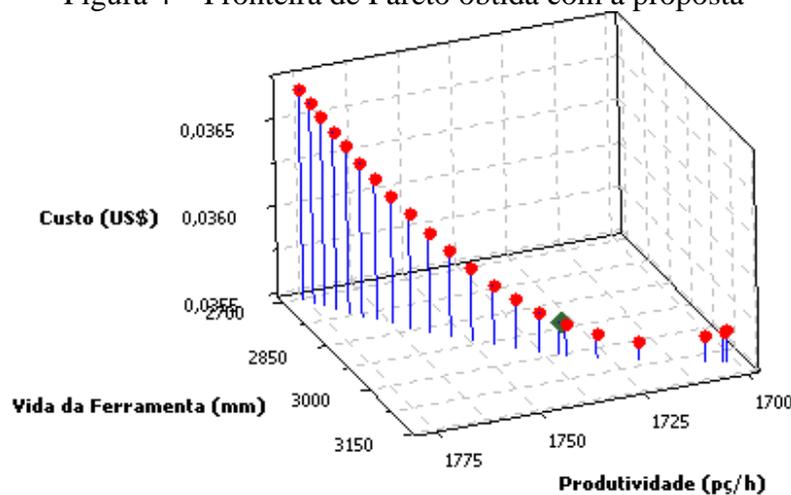


Tabela 7 - Resultado da Otimização das Funções Objetivo

Pesos			Variáveis		Funções Objetivo		
w_1	w_2	w_3	Avanço	Rotação	Vida da Ferramenta	Produtividade	Custo
0,33458	0,33359	0,33183	0,37	262	2707	1776	0,03669
0,34537	0,31468	0,33994	0,37	261	2721	1774	0,03663
0,35772	0,29556	0,34672	0,37	261	2736	1773	0,03656
0,37050	0,27585	0,35365	0,37	260	2752	1771	0,03650
0,38385	0,25544	0,36071	0,37	260	2768	1769	0,03643
0,39778	0,23417	0,36806	0,37	259	2786	1767	0,03636
0,41226	0,21194	0,37580	0,37	259	2804	1765	0,03629
0,42715	0,18876	0,38408	0,37	258	2824	1762	0,03621
0,44200	0,16488	0,39312	0,37	257	2846	1759	0,03613
0,45608	0,14091	0,40301	0,37	256	2869	1756	0,03605
0,46834	0,11778	0,41387	0,37	255	2892	1753	0,03597
0,47800	0,09641	0,42559	0,37	254	2915	1750	0,03589
0,48463	0,07729	0,43808	0,37	253	2938	1746	0,03582
0,48815	0,06050	0,45135	0,37	252	2961	1742	0,03576
0,48881	0,04583	0,46537	0,37	251	2983	1738	0,03570
0,48766	0,03578	0,47656	0,37	250	3001	1735	0,03566
0,48697	0,03297	0,48006	0,37	250	3007	1733	0,03565
0,48300	0,02166	0,49534	0,37	248	3033	1728	0,03561
0,47703	0,01166	0,51131	0,36	246	3064	1720	0,03559
0,47012	0,00274	0,52714	0,36	243	3103	1707	0,03563
0,39184	0,00000	0,60816	0,36	241	3112	1702	0,03566
0,33930	0,00000	0,66070	0,36	241	3111	1703	0,03565

Nota: Valores em negrito representam o ótimo definido pelo processo de otimização proposto.

Fonte: Dados da pesquisa, 2015.

Na Figura 4, observa-se que os pontos Pareto-ótimos estão uniformemente distribuídos na fronteira. A Figura 4 ainda apresenta o ponto com melhor ajuste, em destaque, sendo este o ponto Pareto-ótimo que se apresenta mais diversificado e com o menor erro quando comparado ao valor ideal de cada função objetivo.

5. Conclusão

O presente trabalho teve o intuito de propor um método que possa identificar os pesos ótimos envolvidos em uma formulação multiobjetivo, de maneira não subjetiva, sendo sua relevância constatada pela falta de trabalhos que se propõem a este fim. A definição desses pesos é importante também, pois, esta informação pode ser útil ao tomador de decisão.

O trabalho apresentou uma metodologia para definição dos pesos ótimos que gerando valores ótimos para as variáveis de decisão que podem ser implementados na prática do processo de torneamento vertical analisado, apresentando-se como de fácil implementação, não gerando grande demanda computacional uma vez que as ferramentas estão disponíveis em *softwares* amplamente difundidos, como o caso da função Solver do Excel[®] e do Minitab[®].

O EPG e a Entropia definiram-se como critérios adequados para a avaliação das soluções Pareto-ótimas, possibilitando sua modelagem através de um polinômio de misturas que delimitou uma região de máxima diversificação e mínimo erro para a combinação de pesos analisada.

Assim, as principais contribuições do presente trabalho foram a proposição de um método estruturado, diferenciado em relação às técnicas encontradas na literatura, para a identificação de pesos ótimos em problemas multiobjetivo e a possibilidade de visualização do resultado ótimo na fronteira de Pareto do problema, sendo esta última uma informação de grande relevância para uma gestão mais eficiente dos processos. Além disso, pode-se afirmar que o método proposto promove o máximo atingimento entre os múltiplos objetivos, ou seja, entre um conjunto de soluções Pareto-ótimas, consegue identificar o melhor ponto de ótimo.

A limitação do presente trabalho está na falta de experimentos confirmatórios dos resultados encontrados. Como sugestão para trabalhos futuros, propõe-se a aplicação da metodologia apresentada em outros processos industriais, sendo sua aplicação, *a priori*, possível em vários contextos e com diferentes números de funções objetivo.

Agradecimentos

Os autores agradecem ao CNPq, CAPES, FAPEMIG, IFSULDEMINAS e UNIFEI pelo apoio a presente pesquisa.

REFERÊNCIAS

ARDAKANI, M.K.; NOOROSSANA, R. A new optimization criterion for robust parameter design – the case of target is best. **International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, 38, 851-859, 2008.

BOX, G. E. P.; DRAPER, N. R. **Empirical Model-Building and Response Surfaces**. John Wiley & Sons, 1987, 650 p.

CORNELL, J. **Experiments with mixtures: designs, models, and the analysis of mixture data**. 3 ed. New York: John Wiley & Sons, 2002, 649 p.

DAS, I.; DENNIS, J.E. Normal boundary intersection: A new method for generating the Pareto surface in nonlinear multicriteria optimization problems. **SIAM Journal on Optimization**, 8, 631-657, 1998.

DAS, I.; DENNIS, J.E. A closer look at drawbacks of minimizing weighted sums of objectives for Pareto set generation in multicriteria optimization problems. **Structural Optimization**, 14, 63-69, 1997.

ESKELINEN, P.; MIETTINEN, K. Trade-off analysis approach for interactive nonlinear multiobjective optimization. **OR Spectrum**, 34, 803-816, 2011.

FANG, S.-C; RAJASEKERA, J.R.; TSAO, H.-S.J. **Entropy optimization and mathematical programming**. Kluwer Academic Publishers: Boston, 1997.

HUANG, H.Z.; GU, Y.K.; DU, X. An interactive fuzzy multi-objective optimization method for engineering design. **Engineering Applications of Artificial Intelligence**, 19, 451-460, 2006.

HWANG, C.-L.; MASUD, A.S.M. **Multiple Objective Decision Making - Methods and Applications: A State-of-the-Art Survey**, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 164, Springer-Verlag: New York, 1979.

JIA, Z.; IERAPETRITOU, G. Generate Pareto optimal solutions of scheduling problems using normal boundary intersection technique. **Computers and Chemical Engineering**, v.31, n.4, 268-280, 2007.

MESSAC, A; MATTSON, C.A. Generating Well-Distributed Sets of Pareto Points for Engineering Design Using Physical Programming. **Optimization and Engineering**, 3, 431-450, 2002.

MIETTINEN, K. **Nonlinear multiobjective optimization**. Kluwer Academic Publishers: Boston, 1999.

MONTGOMERY, D. C. **Design and Analysis of Experiments**. 5 ed. New York: John Wiley & Sons, 2001, 684 p.

RAO, S. S. **Engineering optimization: theory and practice**. 4 ed. New Jersey: John Wiley & Sons, 2009, 813 p.

SEVERINO, G.; PAIVA, E.J.; FERREIRA, J.R.; BALESTRASSI, P.P.; PAIVA, A.P. Development of a special geometry carbide tool for the optimization of vertical turning of martensitic gray cast iron piston rings. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, 63, 523-534, 2012.

SHANNON, C.E. A mathematical theory of communication. **Bell System Technical Journal**, 27, 379-423, 623-656, 1948.

SHIN, S.; SAMANLIOGLU, F.; CHO, B.R.; WIECEK, M.M. Computing trade-offs in robust design: perspectives of the mean squared error. **Computers & Industrial Engineering**, 60, 248-255, 2011.

SHUKLA, P.K.; DEB, K. On finding multiple Pareto-optimal solutions using classical and evolutionary generating methods. **European Journal of Operational Research**, v.181, n.3, 1630-1652, 2007.

UTYUZHNIKOV, S.V.; FANTINI, P.; GUENOV, M.D. A method for generating a well-distributed Pareto set in nonlinear multiobjective optimization. **Journal of Computational and Applied Mathematics**, 223, 820-841, 2009.

VAHIDINASAB, V.; JADID, S. Normal boundary intersection method for suppliers' strategic bidding in electricity markets: An environmental/economic approach. **Energy Conversion and Management**, 51, 1111-1119, 2010.

WANG, W.; JING, T.; GAO, Y.; QIAO, G.; ZHAO, X. Properties of a gray cast iron with oriented graphite flakes. **J. Mat. Proc. Tech**, 182 (1-3), 593-597, 2007.