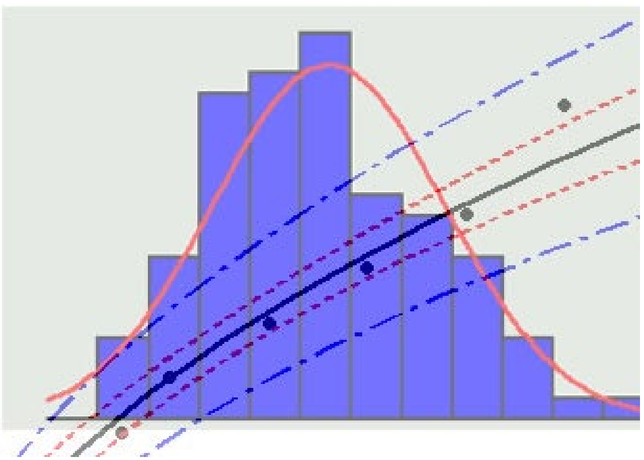
Distribuições Discretas de Probabilidade



Pedro Paulo Balestrassi

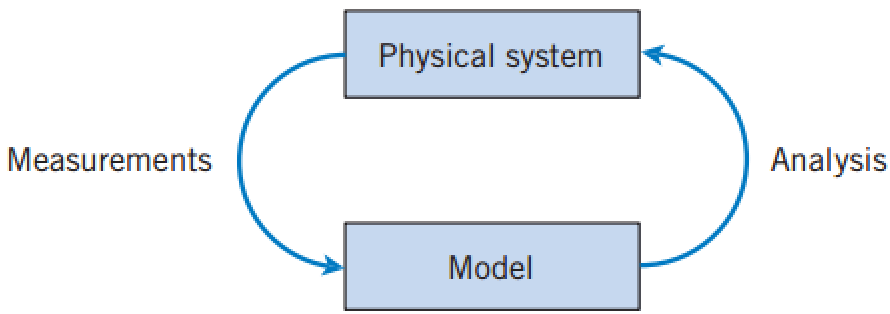
https://pedro.unifei.edu.br

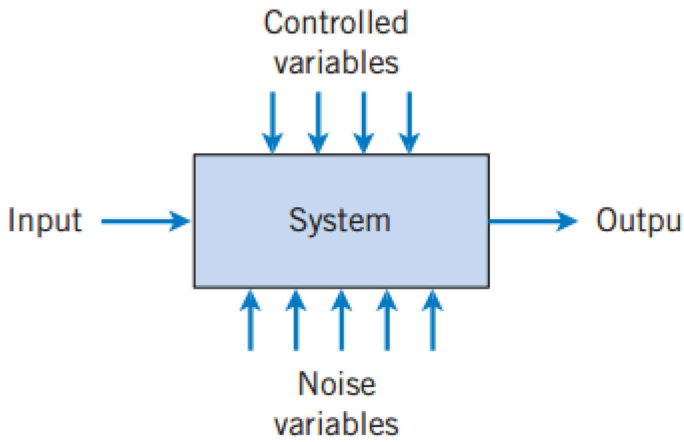
ppbalestrassi@gmail.com

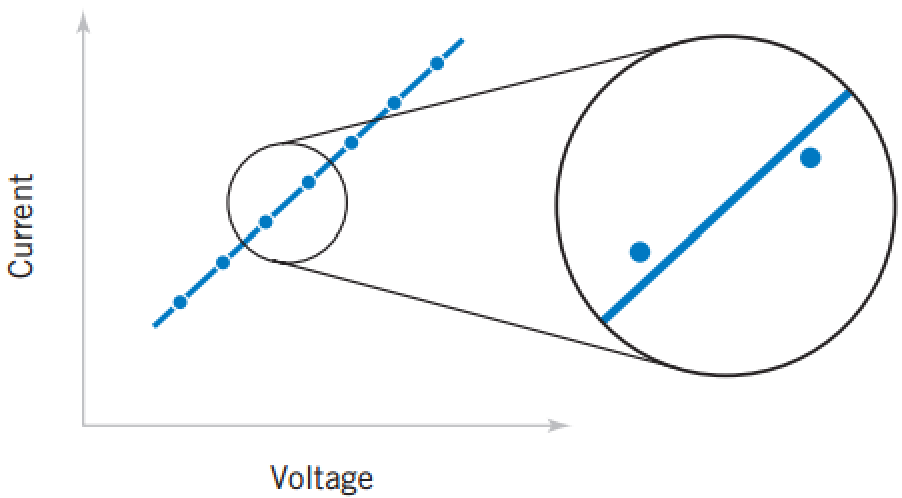
35-36291161 / 999012304 (cel)

Pratique:
https://pedro.unifei.edu.br/quiz/VA
https://pedro.unifei.edu.br/quiz/Discretas

O que é um experimento Aleatório?







Um experimento que pode resultar em diferentes valores, mesmo que repetido sob as mesmas condições é denominado Experimento Aleatório

O que é espaço Amostral, evento e probabilidade?

Espaço amostral (S)	**n(S)**	**Evento (E)**	**n(E)**	**P(E)**
Resultados de um exame de sangue (HIV) S={+, -, ...}	30	Resultados Positivos	3	0,1
Notas de testes de estatistica S={90, 95, 80…}	14	Resultados > 90	13	13/14

O conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento aleatório é chamado de Espaço Amostral

$$P(E)=n(E)/n(S)$$

A **freqüência relativa** $f_i = n_i/n$ comumente é associada à probabilidade.

Variáveis Aleatórias são números

Ex: No teste de 2 componentes eletrônicos podemos ter o seguinte espaço amostral

$$S=\{PP,PN,NP,NN\}$$

sendo *P* um resultado positivo e *N* um resultado negativo.

Seja **X: Número de resultados positivos do teste. (letras maiúsculas)**
x= 0, 1, 2 são os elementos de X

X é uma **Variável Aleatória** e ***P(X=x)=f(x)*** é a probabilidade associada.

Temos então:

Pontos de S	*PP*	*PN*	*NP*	*NN*
x	2	1	1	0
$f(x)$	(1/2)*(1/2)	(1/2)*(1/2)	(1/2)*(1/2)	(1/2)*(1/2)

A **Distribuição de Probabilidade** de **X** é dada por

x	0	1	2
$f(x)$	1/4	1/2	1/4

Variáveis aleatórias associam um número a espaços amostrais

Espaço Amostral	S
Variável Aleatória	X
Números Reais	x
Distribuição de Probabilidade ou *fdp*	$f(x)$

Caso discreto	**Caso contínuo**
$f(x_i) \geq 0$	$f(x) \geq 0$
$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
$P(X = x_i) = f(x_i)$	$P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx \qquad (b > a)$

Variáveis Aleatórias discretas possuem distribuições de probabilidade

Ex.: No teste de partida de válvulas eletrônicas a probabilidade de que haja um resultado positivo é P (+) = 3/4 e um resultado negativo P (-) = (1/4). Os testes prosseguem até que aconteça o primeiro resultado positivo. Temos então o seguinte espaço amostral:

$$S = \{ +, - +, - - +, - - - +, ...\}$$

Definindo a variável aleatória X como:

X : número de testes do experimento. x = 1, 2, 3, ... temos a seguinte distribuição de probabilidade.

X	1	2	3 ...
$P(X)$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{64}$ ...

$P(X)$ foi calculado usando a seguinte função de probabilidade (aceitando que uma válvula não influencie na outra):

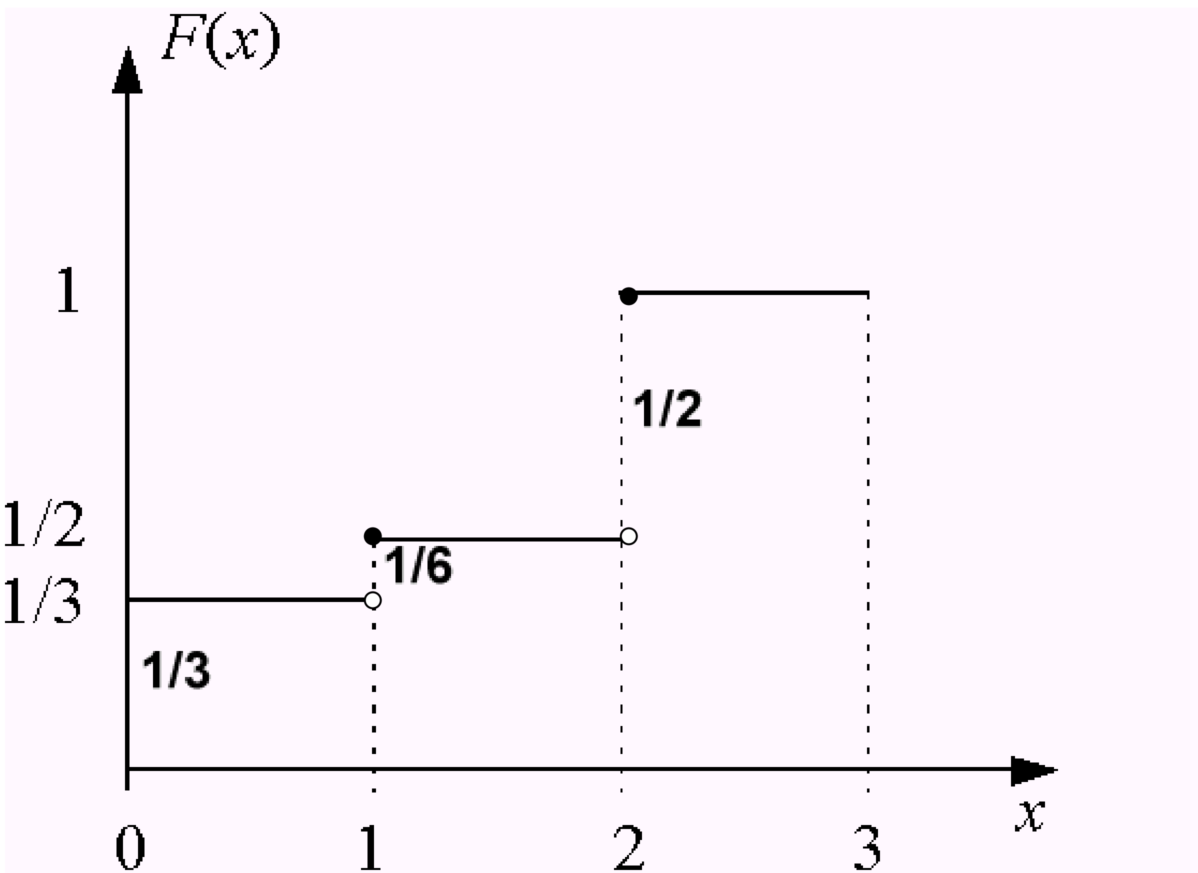
$$P\left(X = x_n\right) = f\left(x_n\right) = (1/4)^{n-1}\,(3/4) \quad \text{com } n = 1, 2, 3, ...$$

Que Distribuição é essa?

observe que ocorre um resultado positivo precedido de n - 1 negativos.

Uma função de distribuição acumulada F(x) tem somatória de probabilidades igual a 1

Suponhamos que a variável aleatória X assuma os três valores 0,1 e 2, com probabilidade 1/3, 1/6 e 1/2, respectivamente.



Pascal criou o conceito de Esperança Matemática

Ex.: Seja X uma *v.a.* que assume os seguintes valores e tenha a seguinte distribuição de probabilidade:

X	$f(x)$
15	0,56
10	0,23
5	0,02
-5	0,19

Use

<Calc>
<Calculator>

Sum(X*f(x))

Cálculo da Esperança Matemática

$$E(X) = \sum x_i f(x_i) = 15(0.56) + 10(0.23) + 5(0.02) + (-5)(0.19) = 9{,}85$$

Esperança Matemática é uma média

X	$f(x)$
15	0,56
10	0,23
5	0,02
-5	0,19

Ex.: Seja X uma *v.a.* que assume os seguintes valores e tenha a seguinte distribuição de probabilidade:

Cálculo da Esperança Matemática

$$E(X) = \sum x_i f(x_i) = 15(0.56) + 10(0.23) + 5(0.02) + (-5)(0.19) = 9{,}85$$

Obs.

$$\boxed{Z_1 = 2X} \qquad Z_1 = \{30, 20, 10, \text{-}10\}$$

$$E(Z_1) = E(2X) = 2E(X) = 19.7$$

$$\boxed{Z_2 = X + 2} \qquad Z_2 = \{17, 12, 7, \text{-}3\}$$

$$E(Z_2) = E(X + 2) = 2 + E(X) = 11.85$$

Uma Variável Aleatória possui média e também Variância

Definimos a variância de X denotada por $Var(X)$, S^2 ou σ^2, da seguinte maneira:

$$Var(X) = E\left[(X - E(X))^2\right]$$

$$Var(X) = E\left[(X - \mu)^2\right]$$

Uma outra expressão para a variância é:

$$Var(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

A raiz quadrada positiva de $Var(X)$ é o desvio padrão de X, *DP(X), S ou* σ.

A Variância de uma Variável Aleatória é um número elevado ao quadrado

Para o Exemplo anterior:

$$Var(X) = E\left[(X-\mu)^2\right]$$

$$Var(X) = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2 = E(X^2) - \mu^2$$

X	$f(x)$
15	0,56
10	0,23
5	0,02
-5	0,19

$E(X)=9,85$

Use

<Calc> <Calculator>

Sum(((X-9,85)2)*f(x))**

Entenda Esperança e Variância 1/2

O tempo *T*, em minutos, necessário para um operário de uma indústria processar certa peça é uma *v.a.* com a seguinte distribuição de probabilidade:

T	2	3	4	5	6	7
p	0,1	0,1	0,3	0,2	0,2	0,1

Para cada peça processada, o operário ganha um fixo de U$ 2.0 mas se ele processa uma peça em menos de 6 minutos, ganha U$ 0.5 por minuto poupado (por exemplo, se ele processa a peça em quatro minutos, recebe a quantia adicional de U$ 1.0).

Qual a média e a variância do tempo de processamento?

Qual a média e a variância do ganho de processamento?

Entenda Esperança e Variância 2/2

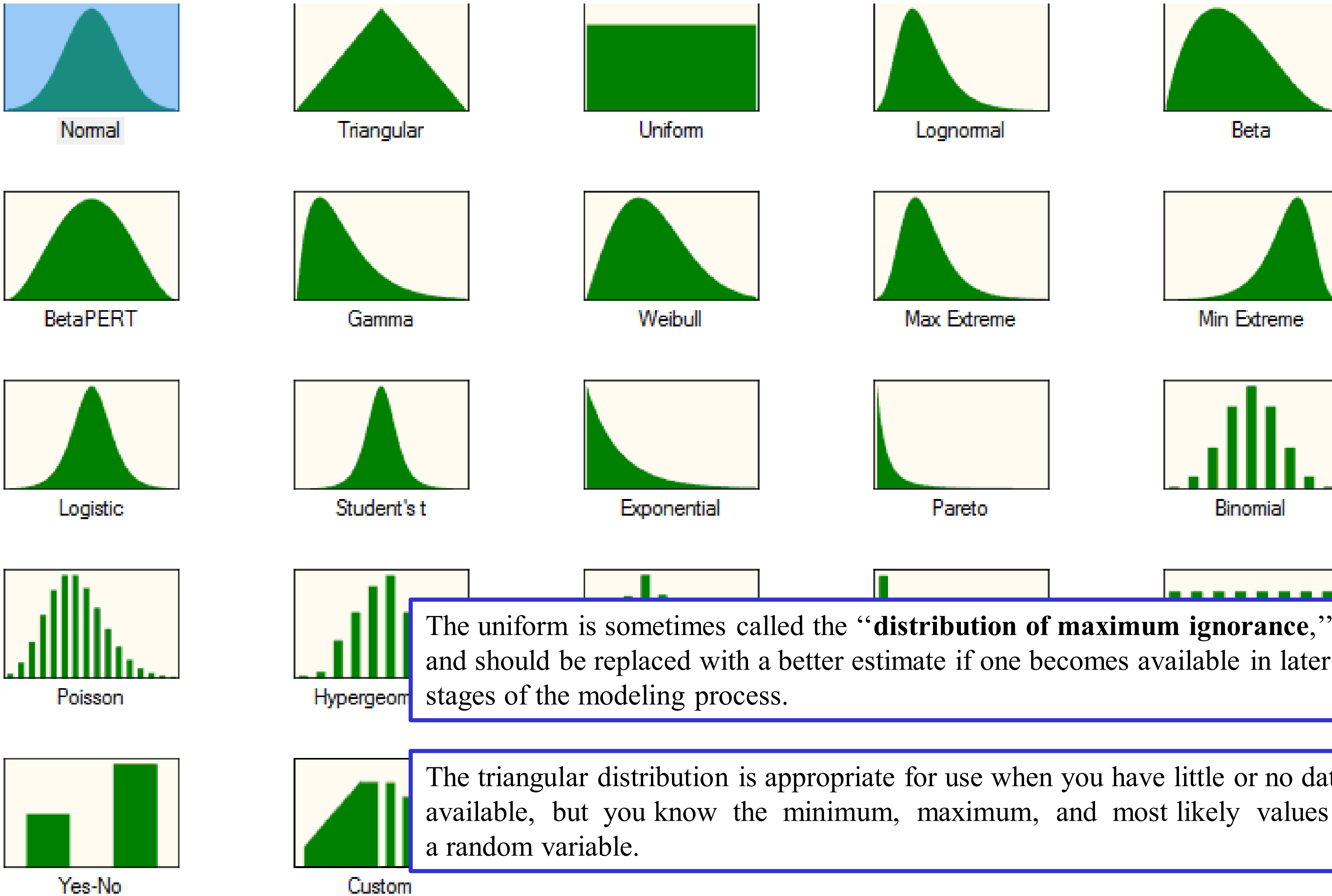
t:tempo	p:probabilidade	g:ganho	E(t)	Var(t)	E(g)	Var(g)
2	0,1	4,0	4,6	2,04	2,75	0,4125
3	0,1	3,5				
4	0,3	3,0				
5	0,2	2,5				
6	0,2	2,0				
7	0,1	2,0				

$$E(X) = \sum x_i f(x_i)$$

$$Var(X) = E\left[(X - \mu)^2\right]$$

Faça o Quiz!
Variáveis Aleatórias

Distribuições de Probabilidade no Crystal Ball



The uniform is sometimes called the "**distribution of maximum ignorance**," and should be replaced with a better estimate if one becomes available in later stages of the modeling process.

The triangular distribution is appropriate for use when you have little or no data available, but you know the minimum, maximum, and most likely values of a random variable.

Propriedades de Distribuições Discretas de Probabilidade

Algumas Distribuições Discretas

- **Distribuição de Bernoulli**
- **Distribuição Binomial**
- **Distribuição de Poisson**
- **Distribuição Geométrica**
- **Distribuição de Pascal**
- **Distribuição Multinomial**
- **Distribuição Hipergeométrica**

$$f(x_i) \geq 0$$

A soma das frequências é unitária

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$$

$$P(X = x_i) = f(x_i)$$

A probabilidade é a frequência

Prova de Bernoulli: Um experimento com dois resultados possíveis

Exemplos

- Jogue **uma** moeda não viciada

  S: {cara, coroa}

  X: Resultado ***cara*** com probabilidade ***p=0.5***
- Avalie o estado de **uma** peça

  S: {Boa, Ruim}

  X: Resultado **Ruim** com probabilidade ***p*** (obtido por exemplo historicamente)
- Avalie a resposta em **um** teste de múltipla escolha com 4 opções (usando chute)

  S: {Certa, Errada}

  X: Resultado **Certa** com probabilidade ***p=1/4***
- **Um** nascimento em um hospital

  S: {menino, menina}

  X: Resultado **menino** com probabilidade ***p~0.5***
- Um teste laboratorial detecta 90% dos casos de uma doença. Avalie o resultado de **uma** pessoa doente sob teste.

  S: {+, - }

  X: Resultado + com probabilidade ***p=0.9***

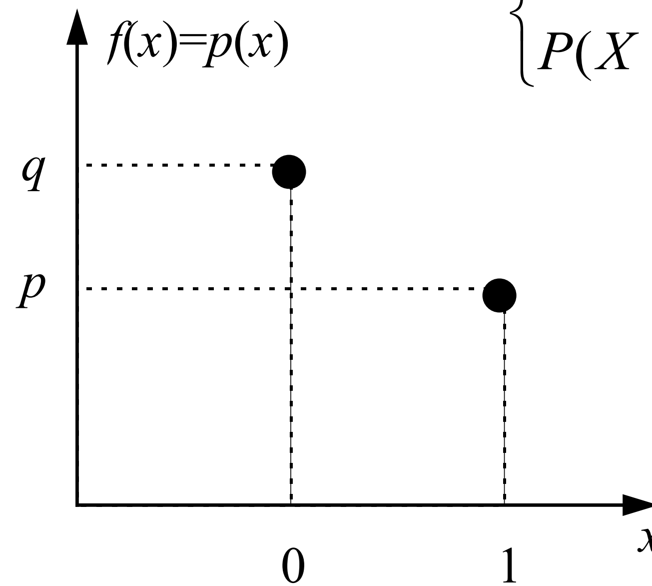
A prova de Bernoulli também possui uma distribuição de Bernoulli

$$S = \{Sucesso, Fracasso\}$$

X: Número de sucessos

$$\begin{cases} P(X=1)=p \\ P(X=0)=q \end{cases}$$

Resultado da prova	Sucesso	Fracasso
X	1	0
$p(x)$	p	q



$$E(X) = 0 \,.\, q + 1 \,.\, p = p$$

$$Var(X) = E(X^2)-[E(X)]^2 = [(0^2.q) + (1^2.p)] - p^2 = p(1-p) = pq$$

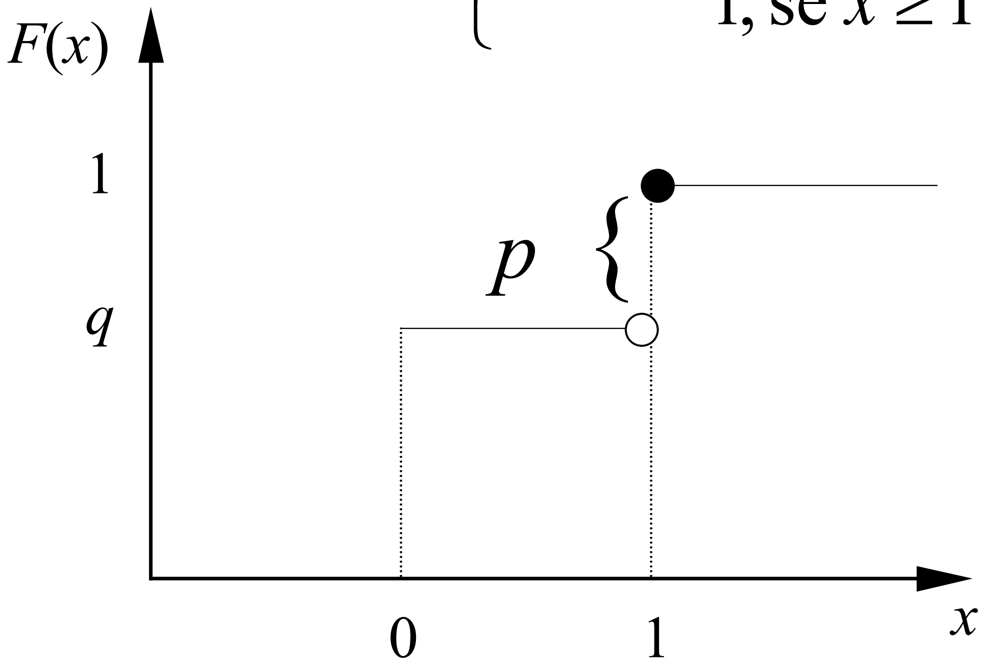
Gere no Minitab, números seguindo a distribuição de Bernoulli

1
0
0
1
.

Entenda a Distribuição acumulada de Bernoulli

Valores Acumulados

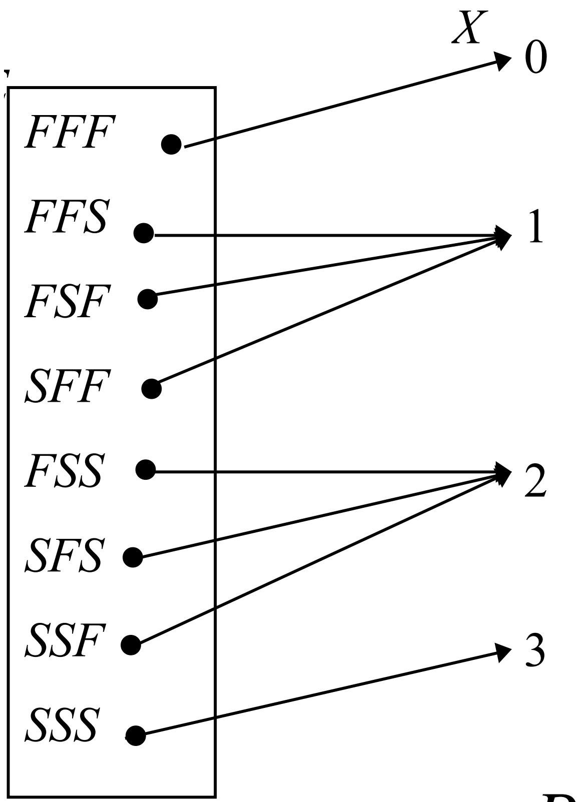
$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ 1 - p = q, \text{ se } 0 \le x < 1 \\ 1, \text{ se } x \ge 1 \end{cases}$$



As provas são independentes umas das outras (o conhecimento do resultado de uma prova, *Sucesso* ou *Fracasso*, não influencia no resultado seguinte).

3 Provas de Bernoulli

Ex.: Suponha um experimento que consiste em três provas de Bernoulli com probabilidade *p* de sucesso em cada prova. A *v.a.* *X* faz a seguinte associação ao espaço amostral:



X: Número de sucessos(*S*)

x	$P(x)$
0	$P\{FFF\} = P(X = 0) = qqq = q^3$
1	$P\{FFS\} + P\{FSF\} + P\{SFF\} = P(X = 1) = 3pq^2$
2	$P\{FSS\} + P\{SFS\} + P\{SSF\} = P(X = 2) = 3p^2q$
3	$P\{SSS\} = P(X = 3) = p^3$

$$P(X = x) = \binom{3}{x} p^x q^{3-x} \qquad x = 0, 1, 2, 3$$

n Provas de Bernoulli e a Distribuição Binomial

x	$P(x)$
0	$P\{FFF\} = P(X = 0) = qqq = q^3$
1	$P\{FFS\} + P\{FSF\} + P\{SFF\} = P(X = 1) = 3pq^2$
2	$P\{FSS\} + P\{SFS\} + P\{SSF\} = P(X = 2) = 3p^2q$
3	$P\{SSS\} = P(X = 3) = p^3$

$$\boxed{P(X = x) = \binom{3}{x} p^x q^{3-x} \quad x = 0, 1, 2, 3}$$

Para 3 provas de Bernoulli

Para n experimentos de Bernoulli, tem-se a **Distribuição Binomial** $\Rightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} P(X = x) &= \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0,1,2,\cdots n \\ &= 0 \quad \text{para outros valores} \end{aligned}}$$

Pode ser mostrar que $\boldsymbol{E(X) = np}$ e $\boldsymbol{Var\,(X) = npq}$

A Distribuição Binomial depende da probabilidade de um evento de Bernoulli

Exemplos

- Jogue **uma** moeda não viciada 3 vezes

  S: {ccc, cck, ckc, kcc, kkc, kck, ckk, kkk}, n(S)=2^3=8

  X: número de caras obtidas. *x=0, 1, 2, 3*

$$\boxed{P(X = x) = \binom{3}{x} 0.5^x 0.5^{3-x}}$$

- Um processo produz 10% de peças defeituosas. Avalie a probabilidade de peças defeituosas nas próximas **25** peças.

  n(S)=2^{25}

  X: número de peças defeituosas *x=0, 1, 2, 3 . . . 25*

$$\boxed{P(X = x) = \binom{25}{x} 0.1^x 0.9^{25-x}}$$

A distribuição Binomial possui média e variância 1/2

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \quad x = 0,1,2,\cdots n$$
$$= 0 \qquad \text{para outros valores}$$

$$\binom{n}{x} = C_{n,x} = \frac{n!}{x!(n-x)!}$$

$$E(X) = np \;\; \text{e} \quad Var(X) = npq$$

Ex.: A probabilidade de um teste “Burn in / Burn out” queimar um componente eletrônico é 0,2 (p). Colocando-se três (n) componentes sob teste, qual a probabilidade de que pelo menos dois deles (x) se “queime”?

A Distribuição Binomial possui média e variância 2/2

$S = \{QQQ, QQN, QNQ, NQQ, NNQ, NQN, QNN, NNN\}$
onde Q e N representam a queima ou não do componente

X: Número de Queimas Q com p=0.2 e q=0.8

x	$P(x)$
0	$P\{NNN\} = P(X=0) = q^3 = (0.8)^3$
1	$P\{NNQ\} + P\{NQN\} + P\{QNN\} = P(X=1) = 3pq^2 = 3(0.2)(0.8)^2$
2	$P\{QQN\} + P\{QNQ\} + P\{NQQ\} = P(X=2) = 3p^2q = 3(0.2)^2(0.8)$
3	$P\{QQQ\} = P(X=3) = p^3 = (0.2)^3$

$$P(X \geq 2) = P(X=2) + P(X=3) = 3p^2q + p^3 = 0.104 = 10{,}4\%$$

Faça no Minitab

Distribuição Binomial: Pratique 1/3

Suponha que uma válvula eletrônica, instalada em determinado circuito, tenha probabilidade 0.2 de funcionar durante o tempo de garantia. São ensaiadas 20 válvulas.

a) Qual a probabilidade de que delas, exatamente k, funcionem durante o tempo de garantia (k = 0, 1, 2, ... 20)? Faça um gráfico.

b) Qual a probabilidade de que 4 funcionem durante o tempo de garantia? **Resp: 21,8%**

c) Qual o número médio e o desvio padrão de válvulas que irão funcionar durante o tempo de garantia? **Resp: 4 e 1.78**

$X \equiv$ Número de válvulas que funcionam durante o tempo de garantia.

$p = 0.2$

$X = 0, 1, 2, \ldots 20$

$$P(X = k) = \binom{20}{k}(0.2)^k (0.8)^{20-k}$$

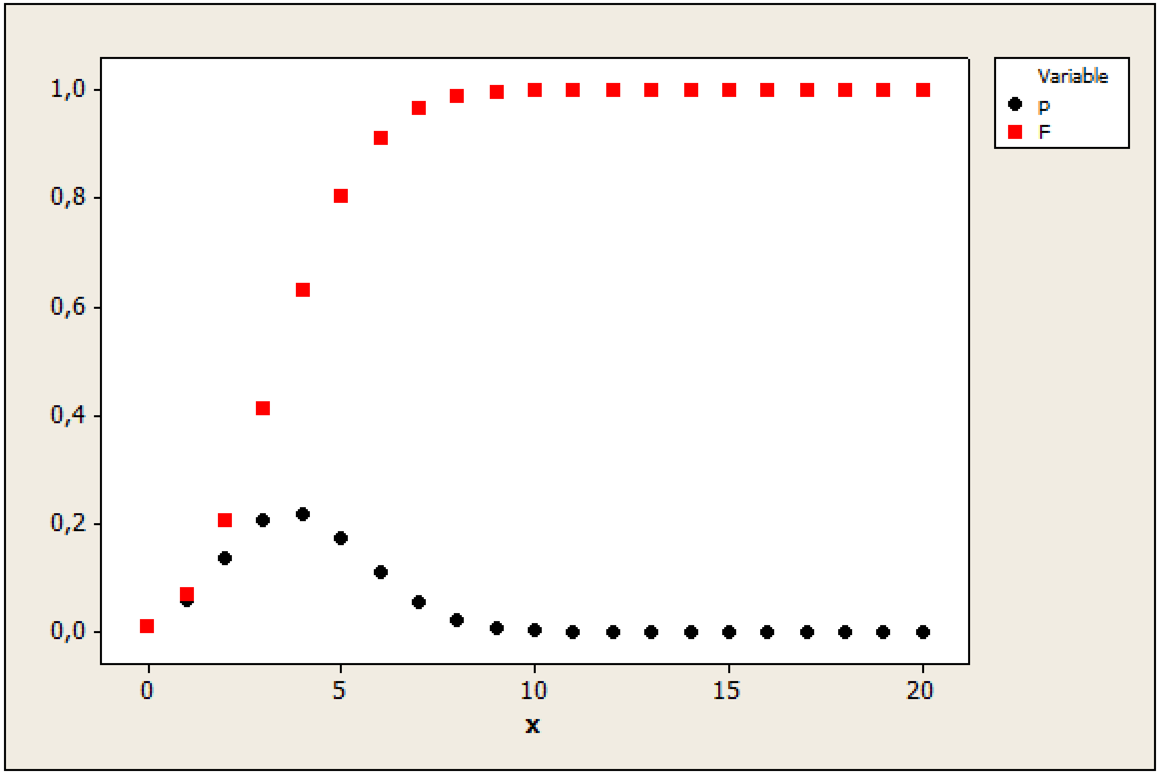
Distribuição Binomial: Pratique 2/3

$$P(X=x)=\binom{20}{x}(0.2)^x(0.8)^{20-x}$$

$$E(x)=np=20.(0.2)=4$$

$$DP(X)=\sqrt{npq}=1.788$$

x	p	F
0	0,011529	0,01153
1	0,057646	0,06918
2	0,136909	0,20608
3	0,205364	0,41145
4	0,218199	0,62965
5	0,174560	0,80421
6	0,109100	0,91331
7	0,054550	0,96786
8	0,022161	0,99002
9	0,007387	0,99741
10	0,002031	0,99944
11	0,000462	0,99990
12	0,000087	0,99998
13	0,000013	1,00000
14	0,000002	1,00000



Distribuição Binomial: Pratique 3/3

Complete a tabela referente a Distribuição Binomial:

n	p	x	P(X=x)	F(x)	P(X>x)	P(X<x)	E(X)	Var(X)
4	0,2	2						
8	0,5	4						
12	**0,7**	**7**	**15.8%**	**27.6%**	**72.4%**	**11.7%**	**8.4**	**2.52**
20	0,8	12						
100	0,6	63						

x	p	F
0	0,000001	0,00000
1	0,000015	0,00002
2	0,000191	0,00021
3	0,001485	0,00169
4	0,007798	0,00949
5	0,029111	0,03860
6	0,079248	0,11785
7	0,158496	0,27634
8	0,231140	0,50748
9	0,239700	0,74718
10	0,167790	0,91497
11	0,071184	0,98616
12	0,013841	1,00000

X:Bin(12;0.7)

Distribuição de Poisson: um modelo probabilístico para inúmeros fenômenos observáveis

- Chamadas telefônicas por unidade de tempo
- Defeitos por unidade de área
- Acidentes por unidade de tempo
- Chegada de clientes a um supermercado por unidade de tempo
- Número de glóbulos sanguíneos visíveis ao microscópio por unidade de área
- Número de partículas emitidas por uma fonte de material radioativo por unidade de tempo

A Distribuição de Poisson descreve uma variável aleatória discreta

Exemplos

- Falhas na superfície de um painel exterior de um automóvel seguem uma distribuição de Poisson, com uma média de 2.4 falhas por painel.

  X: número de falhas no painel obtidas $x=0, 1, 2, 3, \ldots$

  $E(X)=2.4$

- O número de partículas de contaminação que ocorrem em um determinada rio tem uma distribuição de Poisson e o número médio de partículas encontradas (por litro de água) é 0.1. São avaliados 50 litros.

  X: número de partículas de contaminação $x=0, 1, 2, 3, \ldots$

  $E(X)=50*0.1=5$

Na Distribuição de Poisson a média é igual a variância

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad X=0,1,2,\cdots$$

$$\lambda=\mu=np, \quad \sigma=\sqrt{\mu}=\sqrt{np}, \quad E(X)=Var(X)$$

Ex.: Em uma experiência de laboratório passam, em média, por um contador, quatro partículas radioativas por milissegundo. Qual a probabilidade de entrarem no contador seis partículas em determinado milissegundo?

Utilizando a distribuição de Poisson com $\lambda = 4$, então:

$$P(X=6)=\frac{e^{-4}4^{6}}{6!}=0.1042$$

Distribuição de Poisson: Pratique 1/2

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\qquad X=0,1,2,\cdots$$

$$\lambda=\mu=np,\quad \sigma=\sqrt{\mu}=\sqrt{np},\quad E(X)=Var(X)$$

Complete a tabela referente a Distribuição Poisson:

média	x	P(X=x)	F(x)	P(X>x)	P(X<x)
4	2				
4	**4**	**19,53%**	**62,88%**	**37,12%**	**43,34%**
12	3				
20	12				
100	63				

x	p	F
0	0,018316	0,01832
1	0,073263	0,09158
2	0,146525	0,23810
3	0,195367	0,43347
4	0,195367	0,62884
5	0,156293	0,78513
6	0,104196	0,88933
7	0,059540	0,94887
8	0,029770	0,97864
9	0,013231	0,99187
10	0,005292	0,99716
11	0,001925	0,99908
12	0,000642	0,99973
13	0,000197	0,99992
14	0,000056	0,99998
15	0,000015	1,00000
16	0,000004	1,00000
17	0,000001	1,00000
18	0,000000	1,00000

X:Poisson(4)

Distribuição de Poisson: Pratique 2/2

Ex.: Chegam, em média, 10 navios-tanque por dia a um movimentado porto, que tem capacidade para 15 desses navios. Qual a probabilidade de que, em determinado dia, um ou mais navios tanque tenham de ficar ao largo, aguardando vaga?

Temos aqui que, para $\lambda = 10$:

$$P(X > 15) = 1 - P(X \leq 15) = 1 - 0.9513 = 0.0487$$

O Processo de Poisson tem requisitos

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad X=0,1,2,\cdots$$

$$\lambda=\mu=np, \quad \sigma=\sqrt{\mu}=\sqrt{np}, \quad E(X)=Var(X)$$

A distribuição de Poisson exerce um papel extremamente importante porque ela representa um modelo probabilístico adequado para um grande número de fenômenos observáveis.

Suponhamos que determinados eventos estejam ocorrendo em certos intervalos de tempo e que as hipóteses abaixo sejam válidas:

i) O número de ocorrências de um evento em um intervalo de tempo é **independente** do número de ocorrências do evento em qualquer outro intervalo disjunto;
ii) A probabilidade **de duas ou mais ocorrências simultâneas** é praticamente **zero**;
iii) O **número médio de ocorrências** por unidade de tempo é **constante** ao longo do tempo.

A distribuição de Poisson como um limite da Distribuição Binomial

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad X = 0, 1, 2, \cdots$$

$$\lambda = \mu = np, \quad \sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{np}, \quad E(X) = Var(X)$$

Ex.: Consideremos um experimento binomial com $n = 200$, $p = 0.04$ em que se pede a probabilidade de, no máximo, 5 sucessos.

O cálculo direto é impraticável, usando a Distribuição Binomial

$$P(X \leq 5) = \sum_{k=0}^{5} \binom{200}{k} (0.04)^{k} (0.96)^{5-k}$$

Aproximação da Distribuição Binomial

$$\lambda = np = (200)\,(0.04) = 8$$

$$P(X \leq 5) = 0.1912 \text{ (usando Poisson)}$$

Poisson~Binomial 1/2

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad X=0,1,2,\cdots$$

$$\lambda=\mu=np, \quad \sigma=\sqrt{\mu}=\sqrt{np}, \quad E(X)=Var(X)$$

Ex.: A probabilidade de um indivíduo ter reação negativa a certa injeção é de 0,001. Determinar a probabilidade de que de 2.000 indivíduos injetados, exatamente 3 tenham reação negativa.

Usando a distribuição binomial com n = 2.000 e p = 0.001 temos:

$$P(X=3)=\binom{2000}{3}(0.001)^{3}(0.999)^{1997}$$

O cálculo desses números dá origem a considerável dificuldade. Pela aproximação de Poisson temos:

$$\lambda = np = (2000)\ (0.001) = 2 \qquad P(X=3)=\frac{e^{-2}2^{3}}{3!}=0.1804$$

Poisson~Binomial 2/2

$$P(X=x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!}\qquad X=0,1,2,\cdots$$

$$\lambda=\mu=np,\quad \sigma=\sqrt{\mu}=\sqrt{np},\quad E(X)=Var(X)$$

Ex.: A probabilidade de um indivíduo ter reação negativa a certa injeção é de 0,001. Determinar a probabilidade de que de 2.000 indivíduos injetados, mais de quatro tenham reação negativa.

$$\lambda = np = (2000)\,(0.001) = 2$$

$$P(X>4)=1-[P(X=4)+P(X=3)+P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)]$$

$$=1-\left[\frac{e^{-2}2^{4}}{4!}+\frac{e^{-2}2^{3}}{3!}+\frac{e^{-2}2^{2}}{2!}+\frac{e^{-2}2}{1!}+\frac{e^{-2}2^{0}}{0!}\right]$$

$$=1-e^{-2}\left[\frac{16}{24}+\frac{8}{6}+\frac{4}{2}+2+1\right]=0.055$$

Distribuição Geométrica: provas de Bernoulli em uma distribuição "sem memória"

Exemplo

- A probabilidade de acidentes de trabalho em um dia de uma empresa é de 5%. Qual a probabilidade da empresa levar ***x*** dias para ter o primeiro acidente de trabalho.

  S: {A, NA, NNA, NNNA, NNNNA, ... } A:Acidente, N: Não Acidente

  X: número de dias até o acidente de trabalho. *x=1, 2, 3, ...*

  (cada dia é uma prova de Bernoulli e não guarda "memória" do que aconteceu anteriormente)

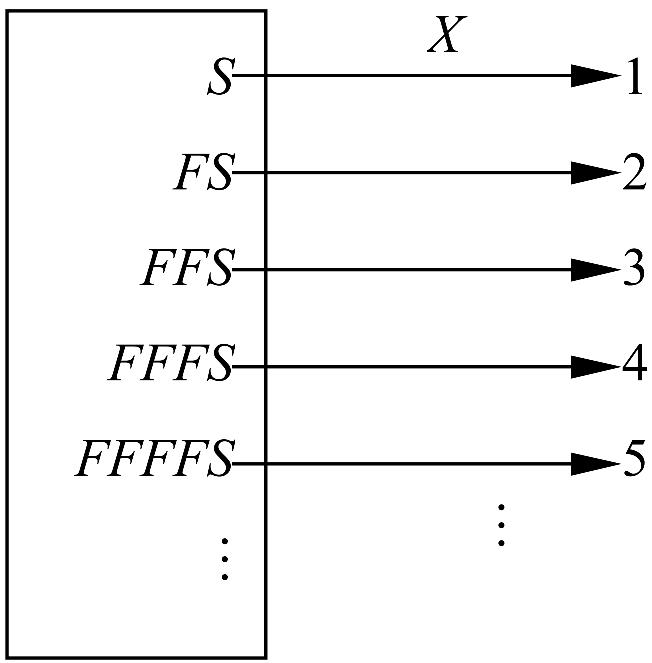
- A probabilidade de alguém atender a sua ligação em menos de 10 segundos é de 20% (dados da operadora). Qual a probabilidade de serem necessárias ***x*** tentativas (para diferentes pessoas) para se obter o primeiro atendimento.

  S: {A, NA, NNA, NNNA, NNNNA, ... } A:Atende, N: Não Atende

  X: número de ligações até o atendimento em menos de 10s. *x=1, 2, 3, ...*

A Distribuição Geométrica é uma variável aleatória discreta

X é definida como o número de provas de Bernoulli necessárias para obter o primeiro sucesso.



$X = 1, 2, 3, \ldots$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

$$f(x) = P\big(X = x\big) = q^{x-1}p \qquad x = 1, 2, 3, \ldots$$
$$= 0 \qquad \text{outros valores}$$

Distribuição Geométrica: pratique

$$f(x) = P(X = x) = q^{x-1}p \qquad x = 1, 2, 3, \ldots$$
$$= 0 \qquad \text{outros valores}$$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

Ex.: Um certo experimento é repetido até que um determinado resultado seja obtido. As provas são independentes e o custo de executar um experimento é de \$ 25.000. Entretanto, se o resultado a alcançar (Sucesso) não for atingido, um custo de \$ 5.000 é necessário para o "setup" da próxima prova. Busca-se determinar o custo esperado do projeto.

X : Número de provas necessárias para obter sucesso no experimento

Distribuição Geométrica: pratique 2/3

$$f(x) = P(X = x) = q^{x-1}p \qquad x = 1, 2, 3, \ldots$$
$$= 0 \qquad \text{outros valores}$$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

X	C(X)
1	25000
2	25000*2 +5000
3	25000*3+5000*2
...	....
x	25000*x+5000(*x*-1)

$C(X) = \$\,25.000\,X + \$\,5.000\,(X - 1)$

$= (30.000)\,X - 5.000$

Assim:

$E\,[C(X)] = E\,[30.000\,X] - E\,(5.000)$

$= 30.000\,E(X) - 5.000 = 30.000 \,.\, 1/p - 5.000$

Se a probabilidade de sucesso em uma simples prova é de, digamos 0,25, então $E[C(X)] = \$\,115.000$.

Distribuição Geométrica: pratique 3/3

$$f(x) = P(X = x) = q^{x-1}p \qquad x = 1, 2, 3, \ldots$$
$$= 0 \qquad \text{outros valores}$$

$$\mu = E(X) = \frac{1}{p}$$

$$\sigma^2 = Var(X) = \frac{q}{p^2}$$

Suponha agora que se tenha somente \$ 500.000 para investir no experimento.
Qual a probabilidade do custo ultrapassar essa quantia?

$$
\begin{aligned}
P(C(X) > 500000) &= P(30000X - 5000 > 500000) \\
&= P\left(X > \frac{505000}{30000}\right) \\
&= P(X > 16.833) \\
&= 1 - P(X \le 16) \\
&= 1 - \sum_{x=1}^{16} (0.25)(0.75)^{x-1} \\
&= 1 - (0.25)\sum_{x=1}^{16} (0.75)^{x-1} \\
&\cong 0.01 = 1\%
\end{aligned}
$$

Distribuição de Pascal: pratique 1/2

(Ou Binomial Negativa)

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

$$f(x) = P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r . q^{k-r}, \qquad k = r, r+1, ..$$

$$Var(X) = \frac{rq}{p^2}$$

Ex.: A probabilidade de um bem sucedido lançamento de foguete é igual a 0,8. Suponha que tentativas de lançamento sejam feitas até que tenham ocorrido 3 lançamentos bem sucedidos. Qual a probabilidade de que exatamente 6 tentativas sejam necessárias?

Temos aqui que:

$p = 0,8$

$S = \{ffffff, \ldots ssfffs, \ldots, sfsffs, \ldots, ssssss\}$

$\binom{6-1}{3-1} p^2 q^3$ representa a distribuição binomial antes do terceiro sucesso ***s***

$$P(X = 3) = \binom{5}{2} (0.8)^2 (0.2)^3 (0.8) = \binom{5}{2} (0.8)^3 (0.2)^3$$

Distribuição de Pascal: pratique 2/2

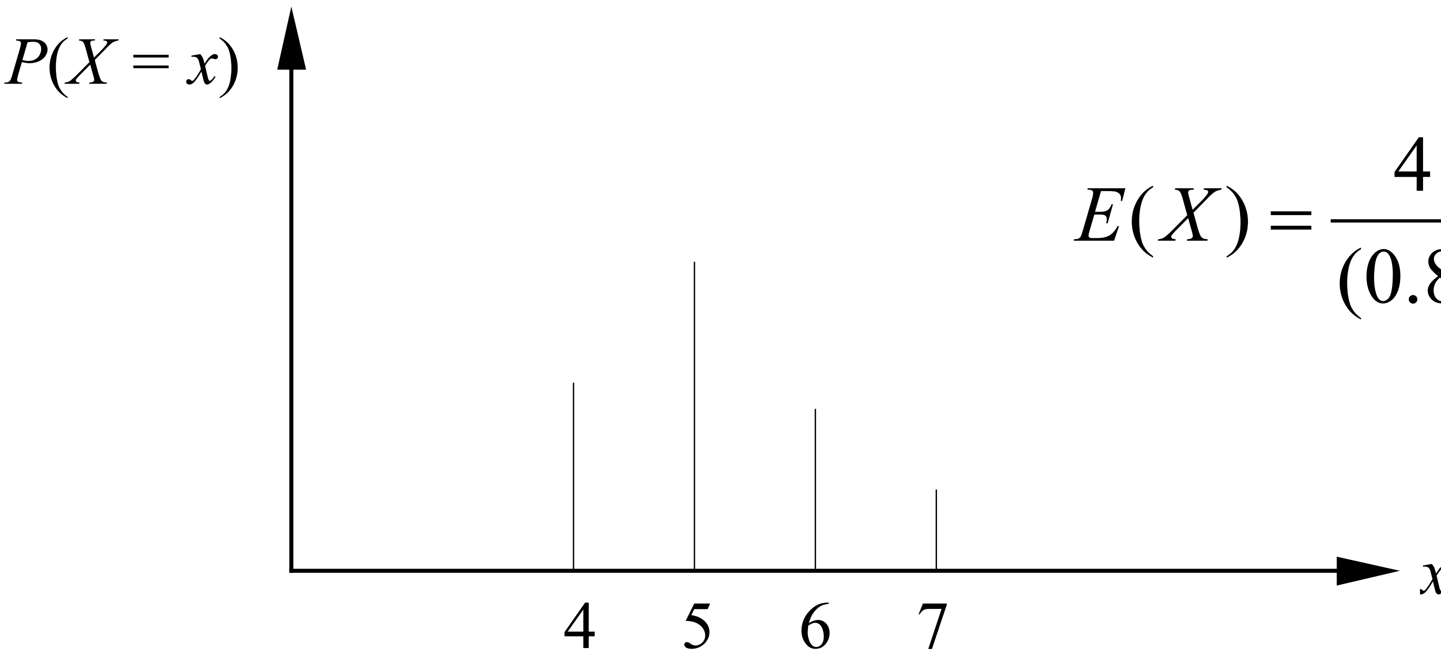
(Ou Binomial Negativa)

$$f(x) = P(X = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r . q^{k-r}, \qquad k = r, r+1, ..$$

$$E(X) = \frac{r}{p}$$

$$Var(X) = \frac{rq}{p^2}$$

Ex.: A probabilidade de que um experimento seja bem sucedido é 0,8, Se o experimento for repetido até que quatro resultados bem sucedidos tenham ocorrido, qual será o número esperado de repetições necessárias?



$$E(X) = \frac{4}{(0.8)} = 5$$

Distribuição Multinomial: um exemplo

(Não existe automaticamente no Minitab)

$$P\left(X_1 = n_1, X_2 = n_2, \cdots, X_k = n_k\right) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_k!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_k^{n_k}$$

Ex.: Uma barra de comprimento especificado é fabricada. Admita-se que o comprimento real X (polegadas) seja uma *v.a.* uniformemente distribuída sobre [10,12]. Suponha que se deseje investigar a ocorrência de três eventos:

$$A_1 = \{X < 10.5\}, A_2 = \{10.5 \le X \le 11.8\} \text{ e } A_3 = \{X > 11.8\}$$

$$p_1 = P(A_1) = 0.25,\ p_2 = P(A_2) = 0.65 \text{ e } p_3 = P(A_3) = 0.1$$

Se 10 dessas barras forem fabricadas, a probabilidade de termos 5 barras de comprimento dado por A_1, e 2 dado por A_3 é obtida por:

$$P(X_1 = 5, X_2 = 3, X_3 = 2) = \frac{10!}{5!3!2!}(0.25)^5(0.65)^3(0.1)^2$$

Distribuição Hipergeométrica: um exemplo

$$P(X=k)=\frac{\binom{r}{k}\binom{N-r}{n-k}}{\binom{N}{n}} \qquad k=0,1,2,..$$

Ex.: Pequenos motores elétricos são expedidos em lotes de 50 unidades. Antes que uma remessa seja aprovada, um inspetor escolhe 5 desses motores e os inspeciona. Se nenhum dos motores inspecionados for defeituoso, o lote é aprovado. Se um ou mais forem verificados defeituosos, todos os motores da remessa são inspecionados. Suponha que existam, de fato, três motores defeituosos no lote. Qual a probabilidade de que a inspeção 100% seja necessária?

Se fizermos igual a X o número de motores defeituosos encontrados, a inspeção 100% será necessária se $X \geq 1$.

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{\binom{3}{0}\binom{47}{5}}{\binom{50}{5}} \cong 0.28$$

Faça o Quiz!
Distribuições Discretas

Pratique!

- Livro Texto: Montgomery/Runger 5e
  - **Chapter 3** (Resolver todos os exercícios relacionados às distribuições existentes no Minitab).