Revisão de Análise Combinatória

O cálculo efetivo da probabilidade de um evento depende freqüentemente do uso dos resultados da Análise Combinatória. Esta seção é, pois, um sumário dos principais resultados dessa área de matemática elementar.

- **Princípio Fundamental da Contagem**

Os problemas de Análise Combinatória são, basicamente, problemas de contagem. A abordagem destes problemas é baseada num fato, de fácil comprovação, denominado Princípio Fundamental da Contagem ou, simplesmente, Regra do Produto, que enunciaremos e exemplificaremos a seguir.

Um acontecimento é composto por k estágios sucessivos e independentes, com, respectivamente, $n_1, n_2, n_3 ..., n_k$ possibilidades cada. O número total de maneiras distintas de ocorrer este acontecimento é $n_1, n_2, n_3 ..., n_k$.

Ex.: Um engenheiro, ao se inscrever em um programa de mestrado deve escolher o curso e a faculdade que deseja cursar. Sabe-se que existem cinco cursos possíveis: Mecânica, Elétrica, Telecomunicações, Civil e Robótica. Cada curso pode ser feito em três faculdades possíveis: no Brasil, no Japão, nos EUA. Qual é o número total de opções que o engenheiro pode fazer?

$n = 5.3 = 15$ opções

- **Técnicas de Contagem**

Seja $A = \{a; b; c; d; ... j\}$ um conjunto formado por 10 elementos distintos, e consideremos os "agrupamentos" *abc*, *abd* e *acb*.

Os agrupamentos *abc* e *abd* são considerados sempre distintos, pois diferem pela natureza de um elemento.

Os agrupamentos *abc* e *acb*, podem ser considerados distintos ou não.

Se por exemplo, os elementos do conjunto A forem pontos, $A = \{A_1, A_2, ... A_{10}\}$, e ligando estes pontos desejarmos obter retas, então os agrupamentos $A_1 A_2$ e $A_2 A_1$ são iguais, pois representam a mesma reta. É isso um típico caso de combinação simples.

Se por outro lado, os elementos do conjunto A forem algarismos, $A = \{0, 1, ..., 9\}$, e com estes algarismos desejarmos obter números, então os agrupamentos 12 e 21 são distintos, pois representam números diferentes. É isso um típico caso de arranjo simples.

Apresentaremos, a seguir, o estudo sucinto dos três tipos de agrupamentos comumente utilizados em problemas de contagem, que são: Arranjos, Permutações (são um tipo particular de arranjo) e combinações.

- **Arranjos simples**

Seja A um conjunto com n elementos e k um número natural, com $k \leq n$. Chama-se arranjo simples k a k, dos n elementos de A, a cada "subconjunto" de k elementos de A.

Obs.: Note que, de acordo com a definição, os arranjos são agrupamentos que diferem entre sí, tanto pela natureza como também pela ordem de seus elementos.

De acordo com a definição dada, na formação de todos os arranjos simples k a k dos n elementos de A, temos:

- n possibilidades na escolha do 1º elemento;
- $n - 1$ possibilidades na escolha do 2º elemento, pois um elemento já foi utilizado;
- $n - 2$ possibilidades na escolha do 3º elemento, pois dois já foram utilizados;

  ⋮
- $n - (k + 1)$ possibilidades na escolha do kº elemento.

De acordo com o Princípio Fundamental da contagem, o número total de arranjos simples k a k dos n elementos de A é $n(n - 1)(n - 2) \ldots (n - k + 1)$**.** Representando esse número por $A_{n,k}$, temos:

$$A_{n,k} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1), \text{ ou ainda}$$

$$A_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Ex.: $A_{10,4} = 10.\ 9.\ 8.\ 7. = 5040$

- **Permutações simples**

Seja A um conjunto com n elementos. Os arranjos simples n a n de n elementos de

A são chamados permutações simples de n elementos, representado por P_n. Assim:

$$P_n = A_{n,\,n} = n!$$

Ex.: $P_6 = 6! = 720$

- **Combinações simples**

Seja A um conjunto com n elementos e k um número natural, com $k \leq n$. Chama-se combinação simples k a k, dos n elementos de A, a cada subconjunto de k elementos de A.

$C_{n,\,k}$ é o símbolo utilizado para representar o número total de combinações de n, k a k. Permutando os k elementos de uma combinação k a k, obtemos P_k arranjos distintos. Permutando os k elementos das $C_{n,k}$ combinações, obtemos P_k**.** $C_{n,k}$ arranjos simples, que são exatamente todos os arranjos simples de **n** elementos k a k.

Assim sendo, $C_{n,k} \,.\, P_k = A_{n,k}$ e portanto:

$$C_{n,k} = \frac{A_{n,k}}{P_k} \quad \text{ou} \quad C_{n,k} = \frac{n!}{k!\,(n - k!)} \quad C_{n,k} = \binom{n}{k}$$

- **Permutações com repetição**

Sejam a elementos iguais a α, b elementos iguais a β, g elementos iguais a γ ..., l elementos iguais a λ, num total de $a+b+g+ \ldots + l = n$ elementos.

O número total de permutações distintas que podemos obter com estes n elementos é:

$$P^* = P_n^{a,b,g,\ldots l} = \frac{n!}{a!b!g!\ldots l!}$$

- **Permutações circulares**

$$P' = (n - 1)!$$

- **Arranjos com repetição**

$$A^*_{n,K} = n^K$$

- **Combinação com repetição**

$$C^{*}_{n,K} = C_{n+K\,-\,1,K} = \binom{n+k-1}{k}$$